Midterm test

TMA4230 Functional analysis

2006–03–17

Norwegian text on the other side. Time available: 60 minutes. Answers to be given in English, Norwegian, or a mixture of the two. If you cannot do the details on a problem, at least try to indicate what you would need to prove and why a known theorem will complete the proof.

Problem 1. State (but do not prove) the Open Mapping theorem.

Problem 2. Let X be a Banach space and X^{**} its second dual. State the definition of the canonical map $X \to X^{**}$. What does it mean to say that X is reflexive?

Give an example of a non-reflexive Banach space, and state (in broad outline only) one reason we can know it is non-reflexive.

Problem 3. Let μ be a σ-finite measure on a measure space Ω and let $p, q, r > 1$ be real numbers with

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}.$$

If $u \in L^p(\Omega, \mu)$ and $v \in L^q(\Omega, \mu)$, show that $uv \in L^r(\Omega, \mu)$. Furthermore, if v is fixed, show that $u \mapsto uv$ is a bounded map $L^p(\Omega, \mu) \to L^r(\Omega, \mu)$. (*Hint*: Note that $|u|^r \in L^{p/r}(\Omega, \mu)$ and $|v|^r \in L^{q/r}(\Omega, \mu)$. What relation holds between p/r and q/r?)

Problem 4. Assume given an infinite two-dimensional array of complex numbers (a_{jk}), $j = 1, 2, \ldots$, $k = 1, 2, \ldots$, satisfying

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_{jk}| < \infty, \qquad j = 1, 2, \ldots$$

Then, for every $x \in c_0$, define the sequence Ax whose jth member is

$$(Ax)_j = \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} x_k, \qquad j = 1, 2, \ldots$$

Assume that $Ax \in \ell^\infty$ for every $x \in c_0$.

Prove that A is a bounded operator from c_0 to ℓ^∞, and express its norm in terms of the coefficients a_{jk}. (*Hint*: Consider the functionals $f_j(x) = (Ax)_j$.)

Semesterprøve

TMA4230 Funksjonalanalyse

2006–03–17

English text on the other side. Tilgjengelig tid: 60 minutter. Svar på engelsk, norsk, eller en blanding. Hvis du ikke får til detaljene i en oppgave, så prøv i det minste å indikere hva du trenger å bevise, og hvorfor et kjent teorem vil fullføre beviset.

Oppgave 1. Skriv opp (men ikke bevis) «open mapping»-teoremet.

Oppgave 2. La X være et Banachrom og X^{**} dets bidual. Skriv opp definisjonen av den kanoniske avbildningen $X \to X^{**}$. Hva betyr det å si at X er refleksivt?

Gi et eksempel på et ikke-refleksivt Banachrom, og oppgi (i grove trekk) en grunn til at vi kan vite det er ikke-refleksivt.

Oppgave 3. La μ være et σ-endelig mål på et målrom Ω og la $p, q, r > 1$ være reelle tall med

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}.$$

Hvis $u \in L^p(\Omega, \mu)$ og $v \in L^q(\Omega, \mu)$, vis at $uv \in L^r(\Omega, \mu)$. Videre, hvis v holdes fiksert, vis at $u \mapsto uv$ er en begrenset avbildning $L^p(\Omega, \mu) \to L^r(\Omega, \mu)$. (*Hint*: Merk at $|u|^r \in L^{p/r}(\Omega, \mu)$ og $|v|^r \in L^{q/r}(\Omega, \mu)$. Hvilken relasjon gjelder mellom p/r og q/r?)

Oppgave 4. Anta det er gitt en uendelig todimensjonal matrise av komplekse tall (a_{jk}), $j = 1, 2, \ldots$, $k = 1, 2, \ldots$, som tilfredsstiller

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_{jk}| < \infty, \qquad j = 1, 2, \ldots$$

Definer, for enhver $x \in c_0$, følgen Ax hvis $j$te element er

$$(Ax)_j = \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} x_k, \qquad j = 1, 2, \ldots$$

Anta at $Ax \in \ell^\infty$ for alle $x \in c_0$.

Vis at A er en begrenset operator fra c_0 til ℓ^∞, og uttrykk dens norm ved koeffisientene a_{jk}. (*Hint*: Betrakt funksjonalene $f_j(x) = (Ax)_j$.)