Norges teknisk-
naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Induksjonsprinsippet — med noen eksempler

SIF5003 Matematikk 1 — høsten 1998

Induksjonsprinsippet

La $P(n)$ være et utsagn som er meningsfylt for ethvert positivt heltall n. For å vise at $P(n)$ er sant for alle slike heltall, er det nok å vise følgende to fakta:

1. Utsagnet $P(n)$ er sant når $n = 1$ (dvs. $P(1)$ er et sant utsagn).
2. Hvis utsagnet $P(n)$ er sant når $n = k$, et fast men uspesifisert positivt heltall, så holder også $P(n)$ når $n = k+1$ (dvs. hvis utsagnet $P(k)$ er sant så er også utsagnet $P(k+1)$ sant).

Eksempel 1

Vi skal vise ved induksjon at formelen

$$P(n) \qquad \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(2i-1)(2i+1)} = \frac{n}{2n+1}$$

er riktig for alle hele tall $n \geq 1$. Setter vi $n = 1$ i $P(n)$, får vi

$$P(1) \qquad \sum_{i=1}^{1} \frac{1}{(2i-1)(2i+1)} = \frac{1}{2+1} \quad \text{dvs.} \quad \frac{1}{1\cdot 3} = \frac{1}{2+1}$$

som stemmer. Vi antar (som induksjonshypotese) at $P(n)$ er riktig for $n = k$, det vil si at

$$P(k) \qquad \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{(2i-1)(2i+1)} = \frac{k}{2k+1},$$

og må vise at da er $P(n)$ riktig for $n = k+1$, vi må altså vise at

$$P(k+1) \qquad \sum_{i=1}^{k+1} \frac{1}{(2i-1)(2i+1)} = \frac{k+1}{2k+3}.$$

Vi viser dette ved å dele opp summen på venstre side i to slik at vi kan bruke induksjons-hypotesen på den første delen:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{k+1} \frac{1}{(2i-1)(2i+1)} &= \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{(2i-1)(2i+1)} + \frac{1}{(2k+1)(2k+3)} \\
&\overset{P(k)}{=} \frac{k}{2k+1} + \frac{1}{(2k+1)(2k+3)} = \frac{2k^2+3k+1}{(2k+1)(2k+3)} \\
&= \frac{(k+1)(2k+1)}{(2k+1)(2k+3)} = \frac{k+1}{2k+3}.
\end{aligned}$$

Altså er $P(k+1)$ riktig, og ved induksjon følger at $P(n)$ gjelder for alle hele tall $n \geq 1$.

Eksempel 2 *Eksamen Matematikk 1A 16.12.94*
Vis ved induksjon at

$$\cos u \cos 2u \cos 4u \cos 8u \cdots \cos\left(2^{n-1}u\right) = \frac{\sin\left(2^n u\right)}{2^n \sin u} \tag{1}$$

for alle hele tall $n \geq 1$.

Setter vi $n = 1$ i (1), har produktet på venstre side bare én faktor, og formelen (1) reduserer seg til

$$\cos u = \frac{\sin 2u}{2 \sin u}$$

som er riktig siden $\sin 2u = 2 \sin u \cos u$. Anta så at (1) er OK for $n = k$:

$$\cos u \cos 2u \cos 4u \cdots \cos\left(2^{k-1}u\right) = \frac{\sin\left(2^k u\right)}{2^k \sin u}. \tag{2}$$

Vi må vise at da er

$$\cos u \cos 2u \cos 4u \cdots \cos\left(2^k u\right) = \frac{\sin\left(2^{k+1} u\right)}{2^{k+1} \sin u}.$$

Det gjør vi ved å bruke induksjonshypotesen (2) og identiteten $\sin v \cos v = \frac{1}{2}\sin 2v$:

$$\begin{aligned}\cos u \cos 2u \cos 4u \cdots \cos\left(2^k u\right) &= \left[\cos u \cos 2u \cdots \cos\left(2^{k-1}u\right)\right] \cdot \cos\left(2^k u\right) \\ &= \frac{\sin\left(2^k u\right)}{2^k \sin u} \cdot \cos\left(2^k u\right) = \frac{\sin\left(2^k u\right)\cos\left(2^k u\right)}{2^k \sin u} = \frac{\frac{1}{2}\sin\left(2 \cdot 2^k u\right)}{2^k \sin u} = \frac{\sin\left(2^{k+1} u\right)}{2^{k+1} \sin u}.\end{aligned}$$

Ved induksjon følger at formelen (1) gjelder for alle hele tall $n \geq 1$.

Eksempel 3 *Bernoullis ulikhet*
Vi skal vise Bernoullis ulikhet

$$(1+x)^n \geq 1 + nx \quad \text{for } x \geq -1 \tag{3}$$

for alle hele tall $n \geq 0$.

For å vise denne ulikheten ved induksjon, kontrollerer vi først at den er riktig for $n = 0$. Setter vi $n = 0$ i (3) får vi

$$1 \geq 1 \quad \text{for } x \geq -1$$

som åpenbart er riktig. Vi antar så at

$$(1+x)^k \geq 1 + kx \quad \text{for } x \geq -1 \tag{4}$$

for et vilkårlig helt tall $k \geq 0$, og må vise at

$$(1+x)^{k+1} \geq 1 + (k+1)x \quad \text{for } x \geq -1. \tag{5}$$

Multipliserer vi begge sider av ulikheten (4) med $x + 1$ (som er ikkenegativ når $x \geq -1$), får vi

$$(1+x)^{k+1} \geq (1+kx)(1+x).$$

Det bruker vi for å vise at (5) holder:

$$(1+x)^{k+1} \geq (1+kx)(1+x) = 1 + (k+1)x + kx^2 \geq 1 + (k+1)x.$$

Dermed er (5) riktig, og Bernoullis ulikhet følger for alle hele tall $n \geq 0$ ved induksjon.