



Løsningsforslag, eksamen MA0001 27.05.2008

**Oppgave 1**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n-3)}{(n-1)^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - 3/n}{(1 - 1/n)^2} = \frac{1}{1} = 1.$$
$$\lim_{n \rightarrow 0} \frac{n(n-3)}{(n-1)^2} = \frac{0(0-3)}{(-1)^2} = \frac{0}{1} = 0.$$

**Oppgave 2** Vi setter  $u = e^x$  inn i ligningen:

$$u^2 - 2u - 3 = 0.$$

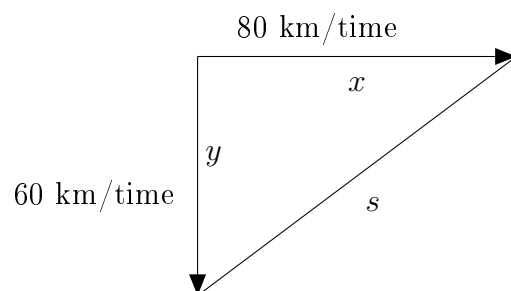
Denne ligningen har løsninger

$$u = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} = \begin{cases} 3 \\ -1 \end{cases}$$

Siden  $u = e^x > 0$  for alle reelle  $x$ , kan vi ikke bruke løsningen  $u = -1$ .

Altså er  $u = e^x = 3$ , og derved  $x = \ln 3$ .

**Oppgave 3**



Etter  $t$  sekunder  $= (t/3600)$  timer har den østgående bilen kjørt

$$x(t) = 80 \cdot \frac{t}{3600} \text{ km} = \frac{t}{45} \text{ km}$$

og den sydgående bilen kjørt

$$y(t) = 60 \cdot \frac{t}{3600} \text{ km} = \frac{t}{60} \text{ km}$$

slik at avstanden mellom dem er

$$\begin{aligned} s(t) &= \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{45}\right)^2 t^2 + \left(\frac{1}{60}\right)^2 t^2} \\ &= \sqrt{\frac{3^2 + 4^2}{15^2 \cdot 3^2 \cdot 4^2}} t \text{ km} = \frac{5t}{15 \cdot 3 \cdot 4} \text{ km} = \frac{t}{36} \text{ km}. \end{aligned}$$

Avstanden  $s(t)$  øker med hastighet

$$v(t) = s'(t) = \frac{1}{36} \text{ km/sekund} = \frac{3600}{36} \text{ km/time} = 100 \text{ km/time.}$$

$$v(30) = 100 \text{ km/time.}$$

Hastigheten  $v(t)$  øker *ikke* raskere og raskere. Avstanden mellom bilene øker faktisk med konstant hastighet 100 km/time.

#### Oppgave 4

$$P(t) = e^t \sin t \quad \text{for } 0 \leq t \leq 3 \text{ år.}$$

a) Randpunkter:

$$P(0) = e^0 \sin 0 = 1 \cdot 0 = 0, \quad P(3) = e^3 \sin 3 \approx 2.83.$$

Kritiske punkter:

$$P'(t) = e^t \sin t + e^t \cos t = 0$$

der  $e^t \neq 0$  for alle  $t$ . Derfor er  $\sin t + \cos t = 0$ , det vil si

$$\sin t = -\cos t$$

$$\tan t = -1$$

$$t = 3\pi/4 \approx 2.356$$

som gir  $P(3\pi/4) = e^{3\pi/4} \sin(3\pi/4) = \frac{e^{3\pi/4}}{\sqrt{2}} \approx 7.46$ .

Populasjonen er derfor størst for  $t = 3\pi/4$ .

b) Populasjonen vokser med hastighet  $P'(t) = e^t \sin t + e^t \cos t$ .

Randpunkter:

$$P'(0) = e^0 \sin 0 + e^0 \cos 0 = 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 = 1, \quad P'(3) = e^3 \sin 3 + e^3 \cos 3 \approx 2.83 + (-19.88) = -17.05.$$

Kritiske punkter:

$$P''(t) = e^t \sin t + e^t \cos t + e^t \cos t - e^t \sin t = 2e^t \cos t = 0$$

der  $e^t \neq 0$  for alle  $t$ . Derfor må  $\cos t = 0$ , det vil si  $t = \pi/2$ , og

$$P'(\pi/2) = e^{\pi/2} \sin \frac{\pi}{2} + e^{\pi/2} \cos \frac{\pi}{2} = e^{\pi/2} \cdot 1 + e^{\pi/2} \cdot 0 = e^{\pi/2} \approx 4.81.$$

Populasjonen er øker derfor raskest når  $t = \pi/2$ .

c) Gjennomsnittlige populasjonsstørrelse over de tre årene er

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} \int_0^3 P(t) dt &= \frac{1}{3} \int_0^3 e^t \sin t dt = \frac{1}{3} \left[ \frac{1}{2} (e^t \sin t - e^t \cos t) \right]_0^3 \\ &= \frac{1}{6} ((e^3 \sin 3 - e^3 \cos 3) - (e^0 \sin 0 - e^0 \cos 0)) \\ &= \frac{1}{6} ((e^3 \sin 3 - e^3 \cos 3) - (0 - 1)) \\ &= \frac{1}{6} (e^3 \sin 3 - e^3 \cos 3 + 1) \approx 3.95. \end{aligned}$$

d) Fra a): Maksimal populasjon:  $P_{\max} \approx 7.46$ .

Fra c): Gjennomsnittlig populasjon:  $\bar{P} \approx 3.95$ .

Den maksimale populasjonen er derfor  $P_{\max} - \bar{P} \approx 3.51$  over gjennomsnittet.

I prosent av gjennomsnittet blir det

$$\frac{P_{\max} - \bar{P}}{\bar{P}} \cdot 100\% \approx \frac{3.51}{3.95} \cdot 100\% \approx 89\%.$$

**Oppgave 5** Vi lar  $r$  betegne radien i kulen. Da er

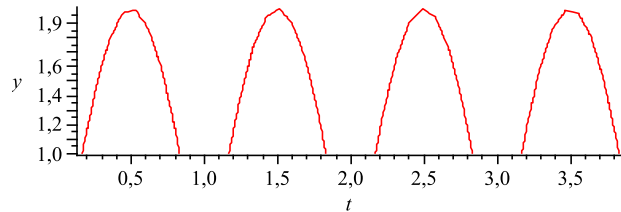
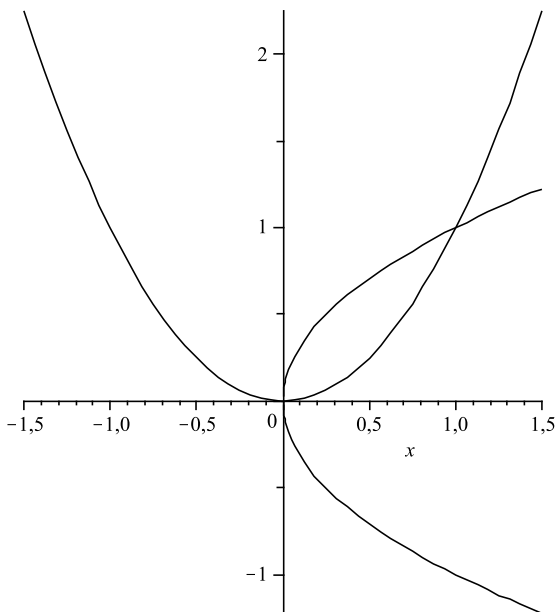
$$A = 4\pi r^2 \quad \text{og} \quad V = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

Siden  $V$  skal skrives som en funksjon av  $A$  og ikke av  $r$ , må vi prøve å uttrykke  $r$  ved hjelp av  $A$  og sette inn i uttrykket for  $V$ .

Av uttrykket for  $A$  får vi at  $r^2 = A/(4\pi)$ , slik at  $r = \sqrt{A/(4\pi)}$ .

Innsatt i  $V$  gir det

$$V = \frac{4}{3}\pi \left( \sqrt{\frac{A}{4\pi}} \right)^3 = \frac{4\pi}{3} \cdot \frac{A^{3/2}}{8\pi\sqrt{\pi}} = \frac{A^{3/2}}{6\sqrt{\pi}}.$$

**Oppgave 6****Oppgave 7**

$x$ -koordinaten i skjæringspunktene mellom de to kurvene:

$$y = x^2 = \sqrt{x} \Rightarrow x^4 = x \Rightarrow x = 0, x = 1.$$

Arealet av det begrensede området er derved

$$\int_0^1 (y_{\text{oppe}} - y_{\text{nede}})dx = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)dx = \left[ \frac{x^{3/2}}{3/2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$