Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

LØSNINGSFORSLAG EKSAMEN 25.05.2010 I MA0001 BRUKERKURS A I MATEMATIKK

Oppgave 1 Fra ligning (1) følger det at $x = 0$ eller $x = y$.

$x = 0$ innsatt i (2) gir $y = 3$, slik at $x = 0$, $y = 3$ er en løsning av ligningssystemet.

$y = x$ innsatt i (2) gir $3x = 3$, slik at $x = 1$, $y = 1$ også er en løsning av systemet.

Oppgave 2 For å finne stigningstallet til tangenten, deriverer vi ligningen implisitt med hensyn på x:

$$3y^2\frac{dy}{dx} + 0 = 6\cos x + 1 + \frac{dy}{dx}.$$

For $x = \frac{\pi}{2}$ og $y = 2$ blir dette

$$\begin{aligned}12\frac{dy}{dx} &= 0 + 1 + \frac{dy}{dx}\\ 11\frac{dy}{dx} &= 1\\ \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{11}\end{aligned}$$

Ligningen $\quad y = 2 + \dfrac{1}{11}\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)$ er derfor en ligning for tangenten.

Oppgave 3

a) Etter $t = 0$ timer er temperaturen $T(0) = 20 + C\,e^0 = 20 + C$ som ifølge oppgaven er lik 1000°C. Altså er $C = 1000 - 20 = 980$.

Videre er $T(1) = 800$ ifølge oppgaven. Det vil si,

$$\begin{aligned}T(1) = 20 + 980\,e^{-k} &= 800\\ e^{-k} &= \frac{800-20}{980} = \frac{780}{980} = \frac{39}{49}\\ -k &= \ln\frac{39}{49} = -\ln\frac{49}{39}\\ k &= \ln\frac{49}{39} \approx 0.2282586517\end{aligned}$$

b) Gjennomsnittstemperaturen i klumpen over tidsrommet fra $t = 0$ til $t = 2$ timer er gitt ved

$$\begin{aligned}\overline{T} &= \frac{1}{2}\int_0^2 \left(2 + 980\left(\frac{39}{49}\right)^t\right) dt = \frac{1}{2}\left[20t + 980\,\frac{(\frac{39}{49})^t}{\ln\frac{39}{49}}\right]_0^2 \\ &= \frac{1}{2}\left(40 - \frac{980}{\ln\frac{49}{39}}\left(\left(\frac{39}{49}\right)^2 - 1\right)\right) = 20 + \frac{1}{2}\,\frac{20}{49\ln\frac{49}{39}}(2401 - 1521) \\ &= 20 + \frac{10\cdot 880}{49\ln\frac{49}{39}} \approx 806.7909293.\end{aligned}$$

c) Gjennomsnittet av $T(0)$ og $T(2)$ er gitt ved $\frac{1}{2}(T(0) + T(2))$ der $T(0) = 1000$ og

$$T(2) = 20 + 980\left(\frac{39}{49}\right)^2 = 20 + \frac{1521\cdot 20}{49}.$$

Det vil si,

$$\frac{1}{2}(T(0) + T(2)) = \frac{1}{2}\left(1000 + 20 + \frac{1521\cdot 20}{49}\right) \approx 820.4081633.$$

At svaret i b) er mindre enn svaret i c) kommer av at avkjølingen skjer raskest når malmklumpen er varmest. (Vi kan også se det fra formen til grafen til T(t)). Derved er klumpen på sitt varmeste i forholdsmessig kortere tid. (Husk, $\overline{T}\cdot 2$ er lik arealet under kurven fra $t = 0$ til $t = 2$.)

Oppgave 4

a) (i) Vekstraten til bakteriekulturen er gitt ved

$$f'(t) = 1 + 6t - \tfrac{3}{2}t^2 =: v(t).$$

Maksimum for $v(t)$ på det lukkede intervallet $[0, 6]$ inntraff enten i $v(0) = 1$, i $v(6) = -17$ eller i et kritisk punkt i $(0, 6)$. De kritiske punktene er gitt ved at $v'(t) = 6 - 3t = 0$. v har altså bare det kritiske punktet $t = 2$ der $v(2) = 7$. Maksimum inntraff derfor for $t = 2$.

(ii) Bakteriekulturen hadde maksimal masse enten i et av randpunktene der $f(0) = 4$ og $f(6) = 10$ eller i et kritisk punkt i $(0, 6)$ der $v(t) = f'(t) = 0$, det vil si,

$$1 + 6t - \tfrac{3}{2}t^2 = 0$$

Dette er en annengradsligning med løsninger

$$t = \frac{-6 \pm \sqrt{36 + 6}}{-3} = 2 \pm \frac{\sqrt{42}}{3}.$$

Bare $t = 2 + \sqrt{42}/3$ ligger i intervallet $(0, 6)$. Av figuren ser vi at maksimum ikke ligger i et randpunkt. Altså var bakteriekulturen maksimal for $t = 2 + \frac{1}{3}\sqrt{42}$.

(iii) Dette er en ny formulering av det samme spørsmålet som i (i). Svaret er derfor fremdeles $t = 2$.

b) Kandidater til maksimum og minimum er randpunktene $t = 0$ og $t = 6$ og de kritiske punktene til

$$g(t) = 12\,t^5 - 75\,t^4 + 140\,t^3 - 90\,t^2 + 300$$

i intervallet $(0, 6)$. De kritiske punktene er gitt ved at

$$g'(t) = 60t^4 - 300t^3 + 420t^2 - 180t = 0$$

som inntreffer for $t = 0$ og for $t^3 - 5t^2 + 7t - 3 = 0$. Det siste er en tredjegradsligning som vi ikke har lært å løse. Men siden $t = 1$ er et kritisk punkt, må venstre side være delelig med $(t - 1)$. Ved polynomdivisjon får vi

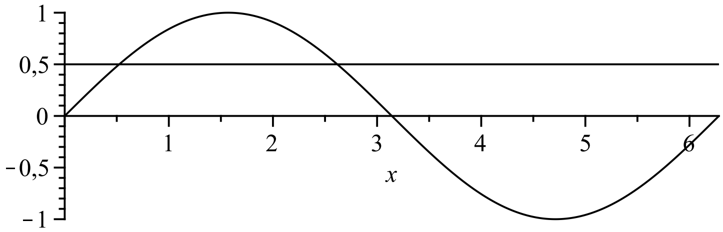
$$\begin{array}{l}
(t^3 - 5t^2 + 7t - 3) : (t-1) = t^2 - 4t + 3 \\
\underline{t^3 - t^2\qquad} \\
\qquad -4t^2 + 7t \\
\qquad \underline{-4t^2 + 4t} \\
\qquad\qquad 3t - 3 \\
\qquad\qquad \underline{3t - 3}
\end{array}$$

Det vil si, $g'(t) = 0$ hvis enten $t = 0$, $t = 1$ eller $t^2 - 4t + 3 = 0$ som er en annegradsligning med løsninger $t = 3$ og $t = 1$. Siden

$$\begin{aligned}
&g(0) = 30 \\
&g(1) = 12 - 75 + 140 - 90 + 300 = 287 \\
&g(3) = 12 \cdot 3^5 - 75 \cdot 3^4 + 140 \cdot 3^3 - 90 \cdot 3^2 + 300 = 111 \\
&g(6) = 23412
\end{aligned}$$

er det klart at kulturen var maksimal for $t = 6$ og minimal for $t = 3$.

Oppgave 5



Vi skal finne arealet av skalken over den rette linjen. Skjæringspunktene mellom grafen til $y = \sin x$ og linjen $y = \frac{1}{2}$ har x-koordinater gitt ved $\sin x = \frac{1}{2}$, det vil si, $x = \frac{\pi}{6}$ og $x = \frac{5\pi}{6}$. Arealet blir derved

$$
\begin{aligned}
A &= \int_{\pi/6}^{5\pi/6} (\sin x - \tfrac{1}{2})dx = \Big[-\cos x - \frac{x}{2}\Big]_{\pi/6}^{5\pi/6} \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{5\pi}{12} + \frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{\pi}{12} = \sqrt{3} - \frac{\pi}{3} \approx 0.684853257.
\end{aligned}
$$