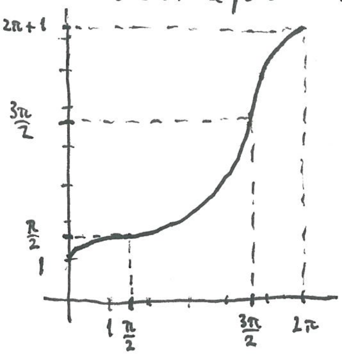
MA0001, 2005V. Løsningsskisse

1a. $f'(x) = 1 - \sin x$, $f''(x) = -\cos x$.
$f'(x) \geq 0$ for alle x i def.mengden, $f'(x) = 0$ bare for $x = \frac{\pi}{2}$. Så f er strengt voksende. Abs. min. i 0, abs. maks. i 2π.
Siden $f(0) = 1$ og f er strengt voksende, har f ingen nullpkt.
$f''(x) < 0$ for $x \in (0, \frac{\pi}{2})$, $f''(x) > 0$ for $x \in (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$, $f''(x) < 0$ for $x \in (\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$,
dvs. vendepkt. i $\frac{\pi}{2}$ og i $\frac{3\pi}{2}$.

b.



2. $\int_0^{2\pi} x f(x)\,dx = \int_0^{2\pi} x(x + \cos x)\,dx = \left[x\left(\frac{1}{2}x^2 + \sin x\right)\right]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2}x^2 + \sin x\right)dx$
$= 2\pi \cdot \frac{1}{2}(2\pi)^2 - \left[\frac{1}{6}x^3 - \cos x\right]_0^{2\pi} = 4\pi^3 - \frac{1}{6}(2\pi)^3 + 1 - 1 = \frac{8}{3}\pi^3$ (delv. int.)

3a. f har en invers funksjon fordi den er strengt voksende, og dermed éntydig. Definisjonsmengden er verdimengden til f, $[1, 2\pi+1]$.

b. $f(0) = 1$, $f'(0) = 1$, $f''(0) = -1$. Så andregrads taylorpolynom om 0 er $P(x) = 1 + x - \frac{1}{2}x^2$. La $x = f^{-1}(1,1)$. Da er $f(x) = 1,1$, dvs. $P(x) \approx 1,1$.
$P(x) = 1,1$ gir $1 + x - \frac{1}{2}x^2 = 1,1$, $x^2 - 2x + 0,2 = 0$, $x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 0,8}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{3,2}}{2}$,
$x \approx 0,89$ el. $x \approx 0,11$. Av disse to er det $0,11$ som er nærmest 0, som vi fant taylorpolynomet om, så $f(0,11) \approx P(0,11) = 1,1$ — dermed er $f^{-1}(1,1) \approx 0,11$. [Med to desimaler er dette riktig verdi for $f^{-1}(1,1)$.] [6 desimaler: Taylorpol. gir 0,105573, virkelig verdi er 0,105567.]

Rettet 13.6.2005

4. Implisitt derivasjon: $2\pi \cos y \cdot \frac{dy}{dx} = 1 - \sin x$, $\frac{dy}{dx} = \frac{1 - \sin x}{2\pi \cos y}$.