Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

LØSNINGSFORSLAG TIL EKSAMEN I MA0001 BRUKERKURS A I MATEMATIKK

Tirsdag 16. desember 2008

Oppgave 1

a) Vi har

$$e^x \cdot e^5 = e^{x+5} = 1 = e^0$$

hvis og bare hvis $x + 5 = 0$, det vil si $x = -5$.

Svar: $x = -5$.

b) Vi setter $u = x^2$. Da kan likningen skrives

$$u^2 - 3u - 4 = 0$$

Dette er en annengradslikning i u med løsninger

$$u = \frac{3 \pm \sqrt{3^2 + 4 \cdot 4}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2}.$$

Siden $u = x^2$, kan løsningen $u = (3-5)/2 = -1$ ikke brukes. Altså er $u = x^2 = (3+5)/2 = 4$, og derved $x = \pm 2$.

Svar: likningen har de to løsningene $x = -2$ og $x = 2$.

Oppgave 2

Vi må finne en likning for tangenten til kurven

$$x^2 + y^2 = 400$$

i punktet $(10,\ 10\sqrt{3})$. Stigningstallet for denne linjen er gitt ved $\dfrac{dy}{dx}$ i dette punktet. Vi deriverer derfor likningen for kurven implisitt med hensyn på x:

$$2x + 2y \cdot \frac{dy}{dx} = 0$$

og setter inn at $x = 10$ og $y = 10\sqrt{3}$:

$$\begin{aligned}
2 \cdot 10 + 2 \cdot 10\sqrt{3} \cdot \frac{dy}{dx} &= 0 \\
\frac{dy}{dx} &= -\frac{2 \cdot 10}{2 \cdot 10\sqrt{3}} = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}.
\end{aligned}$$

Likningen $y = 10\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{3}(x - 10)$ er derfor en likning for linjen. Vi ordner likningen litt og får svaret.

Svar: $y = \dfrac{\sqrt{3}}{3}(40 - x)$.

Oppgave 3 Kobberinnholdet i avrenningen fra gruven X er gitt ved

$$f(t) = \frac{10 + \sin t}{2 + t^2}\ \mu\mathrm{g}/\ell$$

ved tidspunkt t for alle $t \geq 0$. Når $t \to \infty$, er

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{10 + \sin t}{2 + t^2} = 0$$

ved skviseloven (sandwich-loven) fordi

$$\frac{10-1}{2+t^2} \leq \frac{10+\sin t}{2+t^2} \leq \frac{10+1}{2+t^2}$$

der

$$\lim_{t\to\infty} \frac{10-1}{2+t^2} = 0 \quad \text{og} \quad \lim_{t\to\infty} \frac{10+1}{2+t^2} = 0.$$

Altså vil kobberinnholdet i avrenningen fra X gå mot null når $t \to \infty$?

Dersom kobberinnholdet i avrenningen fra X overstiger 10 μg/ℓ ved noe tidspunkt, må det finnes $t > 0$ slik at

$$f(t) = \frac{10 + \sin t}{2 + t^2} > 10,$$

men dette er umulig fordi telleren alltid er $\leq 10 + 1 = 11$ og nevneren alltid er større enn 2, det vil si, brøken for $f(t)$ er alltid $\leq 11/2 < 10$.

Oppgave 4 Den rette linjen gjennom punktene $(0, 1)$ og $(4, 3)$ i xy-planet har stigningstall $k = \dfrac{3-1}{4-0} = \dfrac{1}{2}$.

Linjen har derfor likningen $y = 1 + kx = 1 + \dfrac{x}{2}$.

I dette koordinatsystemet er $x = t^2$ og $y = m^3$. Derfor gjelder

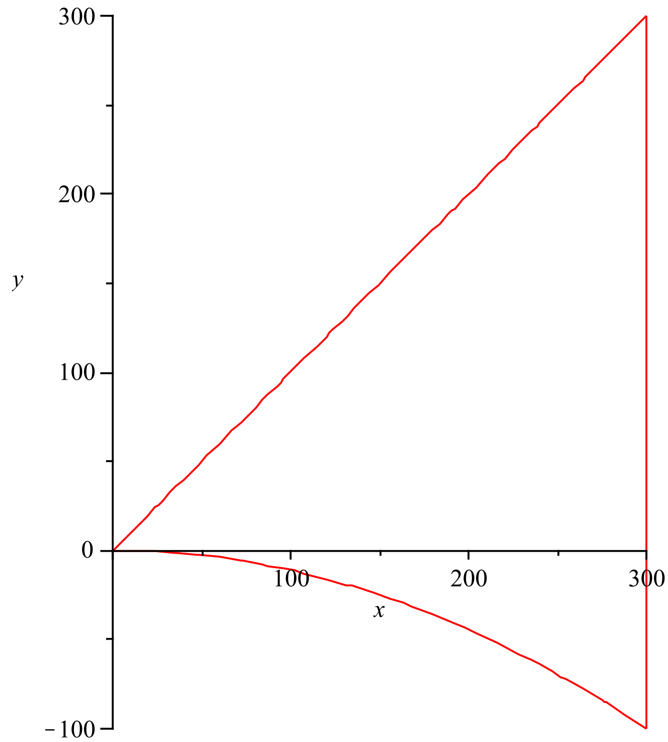
$$m^3 = 1 + \frac{t^2}{2} \quad \text{det vil si,} \quad m = \left(1 + \frac{t^2}{2}\right)^{1/3} = \sqrt[3]{1 + \frac{t^2}{2}}.$$

Svar: m kan uttrykkes som funksjon av t ved $m = \sqrt[3]{1 + \dfrac{t^2}{2}}$.

Oppgave 5

a) Ved ekstremalverdisetningen vet vi at både maksimum og minimum eksisterer på intervallet. (Det kan være flere enn ett av hver, men det gjør ingen ting.) Slike ekstremalpunkter må ligge der grafen til funksjonen har et toppunkt (eller bunnpunkt) eller er horisontal, eller i endepunktene av intervallet. Vi kontrollerer derfor funksjonsverdiene i punktene $x = a$, $x = b$ og i de kritiske punktene der $a < x < b$ og $f'(x) = 0$ eller $f'(x)$ ikke eksisterer, og plukker ut det punktet (eller de punktene) blant disse der $f(x)$ er størst (eller minst). (Funksjonen i oppgaven er slik at det bare finnes endelig mange slike punkter.) Dersom funksjonen har $f'(x) = 0$ på et intervall, trenger vi bare sjekke funksjonsverdien i ett av punktene på dette intervallet fordi $f(x)$ da er konstant på dette intervallet.

b) y

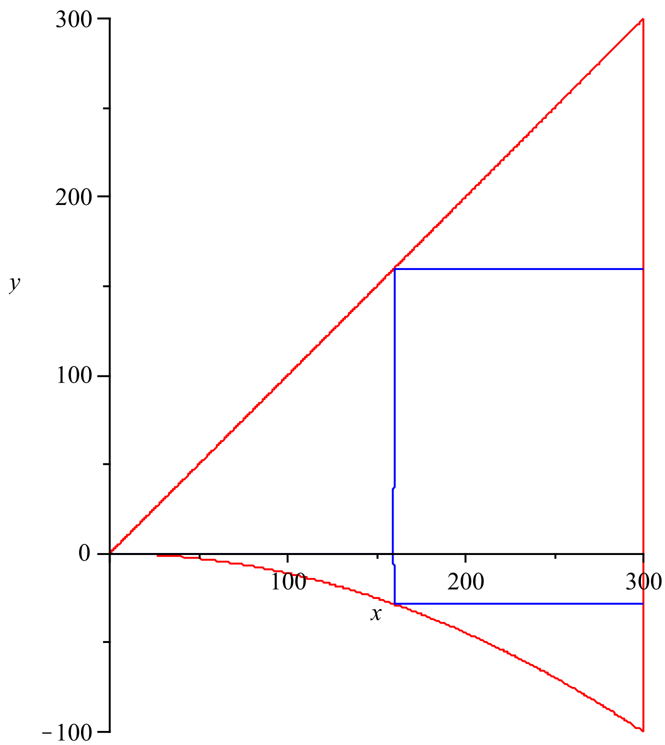


Arealet av jordstykket er gitt ved

$$A = \int_0^{300} \left(x - \left(-\frac{x^2}{900} \right) \right) dx = \int_0^{300} \left(x + \frac{x^2}{900} \right) dx = \left[\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3 \cdot 900} \right]_0^{300}$$

$$= \frac{90\,000}{2} + \frac{300 \cdot 90\,000}{3 \cdot 900} = 45\,000 + 10\,000 = 55\,000\,\mathrm{m}^2 = 55\,\text{mål}.$$

c) y



La x betegne x-koordinaten til det rette linjestykket som avgrenser ballplassen i venstre kant (x målt i meter).

Da får ballplassen bredde $(300 - x)$ meter.

Lengden av ballplassen blir videre $\ell = x - \left(-\frac{x^2}{900}\right) = x + \frac{x^2}{900}$.

Arealet av ballplassen er derfor

$$A = b \cdot \ell = (300 - x)\left(x + \frac{x^2}{900}\right) = 300x + \frac{x^2}{3} - x^2 - \frac{x^3}{900} = f(x).$$

Vi vil bestemme x slik at arealet $f(x)$ blir størst mulig. Det vil si, vi vil finne maksimum for

$$f(x) = 300x + \frac{x^2}{3} - x^2 - \frac{x^3}{900} \quad \text{for} \quad 0 \leq x \leq 300.$$

For $x = 0$ og $x = 300$ er $f(x) = 0$, så maksimum ligger ihvertfall ikke i endepunktene av intervallet $[0, 300]$ for x. Vi søker derfor etter de kritiske punktene. Siden $f(x)$ er deriverbar for alle x, er alle kritiske punkter gitt ved kravet $f'(x) = 0$. Vi har

$$f'(x) = 300 + \frac{2x}{3} - 2x - \frac{3x^2}{900} = 300 - \frac{4x}{3} - \frac{x^2}{300} = 0$$

hvis og bare hvis

$$x^2 + 400x - 90\,000 = 0.$$

Dette er en anengradslikning i x med løsninger

$$x = \frac{-400 \pm \sqrt{400^2 + 4 \cdot 90\,000}}{2} = \frac{-400 \pm 200\sqrt{4+9}}{2} = 100(-2 \pm \sqrt{13}).$$

Bare en av disse verdiene ligger i intervallet $[0, 300]$, nemlig $x = 100(\sqrt{13} - 2) \approx 160.56$. I dette punktet er

$$\begin{aligned} f(x) &= f(100\sqrt{13} - 200) = 300(100\sqrt{13} - 200) - \frac{2(100\sqrt{13} - 200)^2}{3} - \frac{(100\sqrt{13} - 200)^3}{900} \\ &= \frac{20\,000}{9}(13\sqrt{13} - 35) \approx 26\,383\,\mathrm{m}^2. \end{aligned}$$

Svar: den rektangulære ballplassen kan maksimalt få areal $\frac{20\,000}{9}(13\sqrt{13}-35) \approx 26\,383\,\mathrm{m}^2 =$ 26.383 mål.

Ballplassen har i dette tilfellet bredde

$$b = 300 - (100\sqrt{13} - 200) = 500 - 100\sqrt{13} \approx 139.4\,\mathrm{m}$$

og lengde

$$\ell = (100\sqrt{13} - 200) + \frac{(100\sqrt{13} - 200)^2}{900} = \frac{100}{9}(5\sqrt{13} - 1) \approx 189.2\,\mathrm{m}.$$

Svar: Målene til ballplassen er $\left(500 - 100\sqrt{13}\right) \times \left(\frac{100}{9}(5\sqrt{13} - 1)\right) \approx 139.4 \times 189.2$ målt i meter.