Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

EKSAMEN I MA0001 BRUKERKURS A I MATEMATIKK

Mandag 7. desember 2009

LØSNINGSFORSLAG

Oppgave 1 En likning for tangenten til kurven $y = f(x)$ i punktet $(e, f(e))$ er:

$$y - f(e) = f'(e)(x - e) \qquad \text{der } f(e) = \ln(2e) = \ln 2 + \ln e = \ln 2 + 1$$

og

$$f'(x) = \frac{1}{2x} \cdot 2 = \frac{1}{x} \quad \text{slik at} \quad f'(e) = \frac{1}{e}.$$

Det gir følgende likning:

$$y - 1 - \ln 2 = \frac{1}{e}(x - e) = \frac{x}{e} - 1$$
$$y = \frac{x}{e} + \ln 2.$$

Oppgave 2 For at funksjonen

$$f(x) = \frac{a - e^x}{x - 1} \quad \text{for } x \neq 1$$

skal være kontinuerlig for $x = 1$, må grenseverdien $\lim_{x\to 1} f(x)$ eksistere. Det er bare mulig dersom telleren er lik null for $x = 1$. (Funksjonsverdi lik uendelig er ikke mulig for en funksjon!) Eneste mulighet er derfor at $a = e^1 = e$. Vi kontrollerer om grenseverdien eksisterer nå $a = e$ ved å bruke L'Hopital's regel:

$$\lim_{x\to 1} \frac{e - e^x}{x - 1} = \lim_{x=1} \frac{-e^x}{1} = -e.$$

Derved eksisterer grenseverdien, og $f(1)$ kan defineres slik at f blir kontinuerlig i $x = 1$ når $a = e$.

Funksjonsverdien i $x = 1$ er da $f(1) = -e$.

Vi kontrollerer om f er deriverbar i $x = 1$:

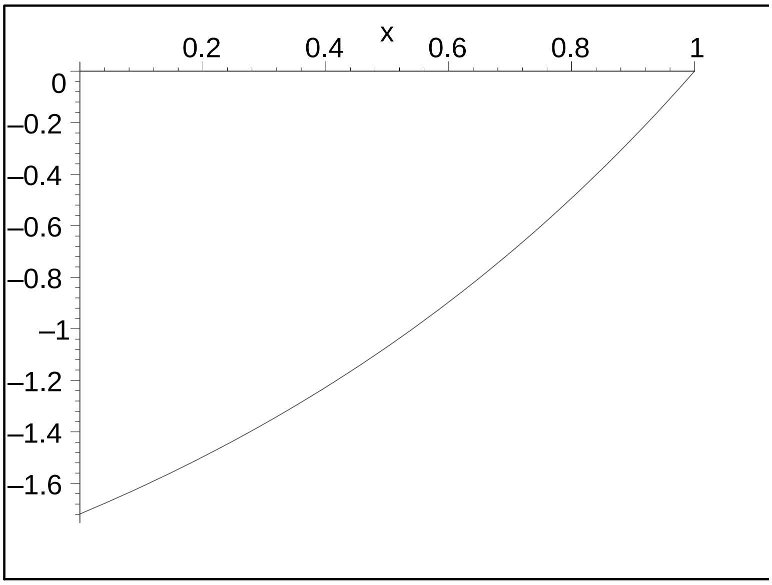
$$f'(1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{e - e^{1+h}}{1 + h - 1} - (-e)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e - e^{1+h} + eh}{h^2}.$$

Også her benytter vi L'Hopital's regel:

$$f'(1) = \lim_{h\to 0} \frac{-e^{1+h} + e}{2h} = \lim_{h\to 0} \frac{-e^{1+h}}{2} = -\frac{e}{2}.$$

Siden denne grenseverdien eksisterer, er f deriverbar i $x = 1$.

Oppgave 3



Området R er som vist på figuren.

a) Arealet av R er gitt ved

$$A = \int_0^1 (y_{\text{øverst}} - y_{\text{nederst}})dx = \int_0^1 (0-(e^x-e))dx = \Big[-e^x+ex\Big]_0^1 = -e+e-(-e^0+0) = 1.$$

b) Siden R dreies om x-aksen, deler vi omdreiningsområdet i skiver normalt på x-aksen. Tverrsnittet av skiven ved x er da en sirkulær flate med radius $r = (y_{\text{øverst}} - y_{\text{nederst}}) = e - e^x$. Arealet av dette tverrsnittet er $\pi r^2 = \pi(e - e^x)^2$, og tykkelsen av skiven er dx. Volumet av omdreiningsområdet er derved

$$V = \int_0^1 \pi(e - e^x)^2 dx = \pi \int_0^1 (e^2 - 2e \cdot e^x + e^{2x})dx = \pi \left[e^2 \cdot x - 2e \cdot e^x + \frac{e^{2x}}{2}\right]_0^1$$
$$= \pi \left[e^2 - 2e^2 + \frac{e^2}{2} - \left(0 - 2e + \frac{1}{2}\right)\right] = \pi\left(-\frac{e^2}{2} + 2e - \frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{2}(4e - e^2 - 1) \approx 3.901970.$$

Hvis vi istedenfor dreier R om aksen $y = 1$, blir den ytre radien i tverrsnittet av skiven ved x lik $r = 1 + e - e^x$. Dessuten blir det et sirkulaert hull i midten av skiven med konstant radius 1. Volumet blir derfor

$$
\begin{aligned}
V &= \int_0^1 \pi(1+e-e^x)^2 dx - \pi\cdot 1^2 \cdot 1 = \pi \int_0^1 ((1+e)^2 - 2(1+e)e^x + e^{2x})dx - \pi \\
&= \pi \left[(1+e)^2 x - 2(1+e)e^x + \frac{e^{2x}}{2} \right]_0^1 - \pi \\
&= \pi \left[(1+e)^2 - 2(1+e)e + \frac{e^2}{2} - \left(0 - 2(1+e) + \frac{1}{2} \right) \right] - \pi \\
&= \pi \left(\frac{5}{2} + 2e - \frac{e^2}{2} - 1 \right) = \frac{\pi}{2}(3 + 4e - e^2) \approx 10.185155.
\end{aligned}
$$

Oppgave 4

a) Det er klart at $x > 0$ er nødvendig siden venstre side av ulikheten ikke er definert for $x \le 0$. For $x > 0$ er begge nevnerne positive, slik at vi kan multiplisere ulikheten med $(x + 12 + \frac{1}{4})\sqrt{x}$. Det gir

$$7\sqrt{x} < x + 12 + \frac{1}{4}.$$

Vi kvadrerer på hver side av ulikhetstegnet, og finner at ulikheten holder bare hvis

$$
\begin{aligned}
49x &< \left(x + \frac{49}{4}\right)^2 = x^2 + \frac{49}{2}x + \left(\frac{49}{4}\right)^2 \\
0 &< x^2 - \frac{49}{2}x + \left(\frac{49}{4}\right)^2 = \left(x - \frac{49}{4}\right)^2.
\end{aligned}
$$

Siden høyre side alltid er ≥ 0, holder denne ulikheten hvis og bare hvis høyre side er $\ne 0$, det vil si, for $x \ne 49/4$.

Vi kontrollerer til slutt at den opprinnelige ulikheten virkelig holder på begge sider av $x = 49/4$. (Det holder å kontrollere i ett punkt på hver side på grunn av kontinuiteten.) Vi ser lett at den holder for $x = 1 < 49/5$ og for $x = 16 > 49/5$.

b) Kandidater til maksimum og minimum for $g(x)$ er:

Endepunkter for intervallet: $x = -\frac{1}{2}$ og $x = 3$. I disse punktene er $g(-\frac{1}{2}) = 0$ og $g(3) = 7/(b + \frac{1}{4} + 3 + 9) = 7/(b + \frac{1}{4} + 12)$.

Kritiske punkter der $g'(x) = 0$ eller $g'(x)$ ikke eksisterer. Vi har

$$g'(x) = \frac{2(b + \frac{1}{4} + x + x^2) - (1+2x)(1+2x)}{(b + \frac{1}{4} + x + x^2)^2}$$

som eksisterer for all x mellom $-\frac{1}{2}$ og 3. Det er klart at $g'(x) = 0$ hvis og bare hvis

$$\begin{aligned}
2(b + \frac{1}{4} + x + x^2) - (1+2x)(1+2x) &= 0 \\
2b + \frac{1}{2} + 2x + 2x^2 - 1 - 4x - 4x^2 &= 0 \\
2b &= 2x^2 + 2x + \frac{1}{2} \\
x^2 + x + \frac{1}{4} &= b \\
(x + \frac{1}{2})^2 &= b \\
x + \frac{1}{2} &= \pm\sqrt{b} \\
x &= -\frac{1}{2} \pm \sqrt{b}.
\end{aligned}$$

Det er klart at $x = -\frac{1}{2} - \sqrt{b}$ ligger utenfor intervallet $[-\frac{1}{2}, 3]$. Altså har $g(x)$ bare ett kritisk punkt, nemlig $x = -\frac{1}{2} + \sqrt{b}$. Funksjonsverdien i dette punktet er

$$g(-\frac{1}{2} + \sqrt{b}) = \frac{1 - 1 + 2\sqrt{b}}{b + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \sqrt{b} + \frac{1}{4} - \sqrt{b} + b} = \frac{2\sqrt{b}}{2b} = \frac{1}{\sqrt{b}}.$$

Konklusjon: Blant våre tre kandidater er funksjonsverdien minst i $x = -\frac{1}{2}$ der $g(0) = 0$. For å finne det punktet der funksjonsverdien er størst, må vi avgjøre hvilken av de to funksjonsverdiene $g(3) = 7/(b + \frac{1}{4} + 12)$ og $g(-\frac{1}{2} + \sqrt{b}) = 1/\sqrt{b}$ som er størst. Men det har vi allerede gjort i punkt a). Der så vi at $g(-\frac{1}{2} + \sqrt{b}) = 1/\sqrt{b}$ er størst. Altså er største verdien g kan ta på intervallet gitt ved $1/\sqrt{b}$.

c) Vi definerer

$$f(x) = 3 - \ln(2 + x + x^2) \qquad \text{for} \quad -\frac{1}{2} \le x \le \frac{15}{4}.$$

Da er bakkeprofilen gitt ved $y = f(x)$, og den deriverte $f'(1)$ sier hvor bratt bakken er i punktet $(1, 3 - \ln 4)$. Vi har

$$\begin{aligned}
f'(x) &= 0 - \frac{1}{2 + x + x^2} \cdot (1 + 2x) = -\frac{1 + 2x}{2 + x + x^2} \\
f'(1) &= -\frac{3}{2 + 1 + 1} = -\frac{3}{4}.
\end{aligned}$$

Det vil si at i dette punktet er bakken like bratt som en bakke med rettlinjet profil der høydeforskjellen mellom to punkter med horisonal avstand 4m er 3m.

d) Vi søker maksimum for funksjonen $g(x) = f'(x) = -(1 + 2x)/(2 + x + x^2)$. Men dette er akkurat samme funksjon som i b) dersom vi setter $b = 7/4$. Altså inntreffer maksimum i

$$x = -\frac{1}{2} + \sqrt{b} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{7}}{2} = \frac{\sqrt{7} - 1}{2}.$$