LØSNINGSFORSLAG TIL EKSAMEN I MA0001 BRUKERKURS A

Tirsdag 14. desember 2010

Oppgave 1 Ligningen kan skrives

$$\begin{aligned} 4\ln x - 3\ln x &= 1 \\ \ln x &= 1 \\ x &= e^1 = e. \end{aligned}$$

Oppgave 2 For å besvare spørsmålet, vil vi finne

$$L = \lim_{t\to\infty} P(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{\sqrt{25+t^2} - 5 + e^{-t}}{t^2}$$

som er et (∞/∞)-uttrykk.

Det kan være fristende å bruke L'Hôpitals regel, men man ser fort at dette ikke fungerer så bra for dette uttrykket.

Ser vi nærmere på uttrykket, er det klart at $\sqrt{25+t^2} \to \infty$, slik at konstanten 5 og eksponensialleddet e^{-t} som går mot null, ikke vil få noen betydning for grenseverdien. Derfor er

$$L = \lim_{t\to\infty} \frac{\sqrt{25+t^2}}{t^2} + \lim_{t\to\infty} \frac{-5+e^{-t}}{t^2} = \lim_{t\to\infty} \frac{\sqrt{25+t^2}}{t^2} + 0 = \lim_{t\to\infty} \frac{\sqrt{25+t^2}}{t^2}.$$

Faktisk, ser vi på telleren, er det klart at $t^2 \to \infty$, så konstanten 25 vil heller ikke få noen betydning for grenseverdien. Altså er

$$L = \lim_{t\to\infty} \frac{\sqrt{t^2}}{t^2} = \lim_{t\to\infty} \frac{t}{t^2} = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} = 0.$$

Alternativt: Ved L'Hôpitals regel er

$$L = \lim_{t\to\infty} \frac{\sqrt{25+t^2}}{t^2} = \lim_{t\to\infty} \frac{\frac{1}{2\sqrt{25+t^2}} \cdot 2t}{2t} = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{2\sqrt{25+t^2}} = 0.$$

Oppgave 3 **Løsningsalternativ 1:** For å se for hvilke x

$$3x^2 + 1 + 4c^2 > 6cx,$$

ser vi først for hvilke x vi har likhet; det vil si, for hvilke x

$$3x^2 + 1 + 4c^2 = 6cx \qquad \text{altså} \quad 3x^2 - 6cx + 1 + 4c^2 = 0.$$

Dette er en andregradsligning i x med løsninger

$$x = \frac{6c \pm \sqrt{36c^2 - 4 \cdot 3(1 + 4c^2)}}{6} = \frac{6c \pm \sqrt{36c^2 - 12 - 48c^2}}{6} = \frac{6c \pm \sqrt{-12 - 12c^2}}{6}.$$

Siden det som står under rottegnet alltid er negativt, har denne ligningen ingen reelle løsninger. Siden $f(x) = 3x^2 - 6cx + 1 + 4c^2$ er en kontinuerlig funksjon av x, følger det av skjæringssetningen at $f(x)$ enten er positiv for alle reelle x eller negativ for alle reelle x.

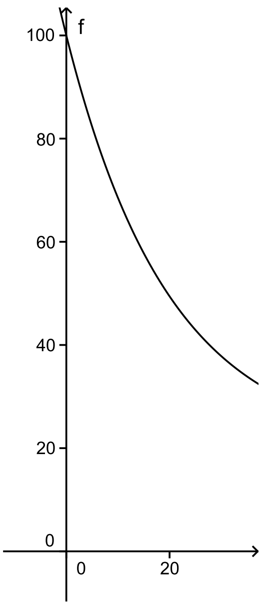
For $x = 0$, er $f(0) = 1 + 4c^2 > 0$. Altså er $f(x) > 0$ for alle reelle x. Det vil si, ulikheten holder for alle reelle x.

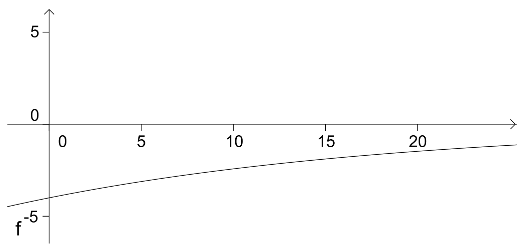
Løsningsalternativ 2: Som over, vil vi vise at $f(x) = 3x^2 - 6cx + 1 + 4c^2 > 0$ for alle reelle x. Vi har:

$$\begin{aligned} f(x) &= 3(x^2 - 2cx) + 1 + 4c^2 = 3\left(x^2 - 2cx + \left(\frac{2c}{2}\right)^2\right) - 3 \cdot \left(\frac{2c}{2}\right)^2 + 1 + 4c^2 \\ &= 3(x-c)^2 - 3c^2 + 1 + 4c^2 = 3(x-c)^2 + 1 + c^2 \end{aligned}$$

der $(x - c)^2 \geq 0$ og $1 + c^2 > 0$ for alle reelle x. Altså er $f(x) > 0$ for alle reelle x.

Oppgave 4 Grafen til $T(t)$ må være avtakende, og brattest i starten der temperaturforskjellen er størst. Altså noe ala den første grafen under.





Den andre grafen viser hvordan $T'(t)$ varierer. (Det er klart at $T'(t) < 0$ siden $T(t)$ er en avtakende funksjon. Det er også klart at $|T'(t)|$ er størst for små t, siden grafen til $T(t)$ er brattest for små t.)

Oppgave 5

En slik sirkulær kjegle med radius r og høyde h har volum $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$. Tanken har derfor volum $V = \frac{1}{3}\pi 3^2 \cdot 4 = 12\pi \text{ m}^3 = 12000\pi$ liter. Tiden det tar å fylle tanken er derfor

$$t = \frac{12000\pi}{10} \text{ sekunder} = 1200\pi \text{ sekunder} = 20\pi \text{ minutter.}$$

Det er klart at vannhøyden stiger raskest til å begynne med, der tanken er smalest, og at vannhøyden stiger saktere og saktere etterhvert.

Vi lar $t = 0$ idet vi starter å fylle tanken, der t er målt i sekunder, og lar $h = h(t)$ være vannhøyden ved tidspunkt t under fyllingen, der h er målt i dm. Ved høyde h har vannspeilet en radius $r = 3h/4$ målt i dm, slik at vannvolumet er

$$V(t) = \frac{1}{3}\pi \left(\frac{3h(t)}{4}\right)^2 \cdot h(t) = \frac{3\pi h(t)^3}{16}.$$

Vi VET at $V'(t) = 10$ liter/sekund. Vi søker $h'(t)$ akkurat idet $h = 20$ dm. Vi deriverer derfor uttrykket for $V(t)$ med hensyn på t:

$$V'(t) = \frac{3\pi}{16} \cdot 3h(t)^2 h'(t)$$

som gir sammenhengen (koblingen) mellom $V'(t)$ og $h'(t)$. Når $h(t) = 20$ og $V'(t) = 10$, er

$$h'(t) = \frac{16}{3\pi} \cdot \frac{V'(t)}{3h(t)^2} = \frac{160}{9\pi \cdot 400} = \frac{2}{45\pi} \frac{\text{dm}}{\text{sekund}}.$$

Konklusjon: Akkurat idet $h = 20$ dm $= 2$ m, stiger vannhøyden med $(2/45\pi)$ dm/sekund.

Oppgave 6

Løsningalternativ 1: Vi vet at eksponensialfunksjonen $f(x) = Ce^{kx}$ har den egenskapen at

$$f(x+1) = Ce^{k(x+1)} = Ce^{kx+k} = Ce^{kx} \cdot e^k = f(x)e^k.$$

Ifølge oppgaven er

$$P(t+1) = P(t) + P(t) - \frac{1}{4}P(t) = \frac{7}{4}P(t).$$

Vi kan derfor bruke en funksjon på formen $P(t) = Ce^{kt}$ der $e^k = 7/4$. Det vil si,

$$P(t) = Ce^{kt} = C(e^k)^t = C\left(\frac{7}{4}\right)^t.$$

Siden $P(0) = Ce^0 = C = 100\,000$, betyr det at vårt forslag til funksjon er

$$P(t) = 100\,000\left(\frac{7}{4}\right)^t.$$

(Eventuelt: $e^k = 7/4$ gir at $k = \ln(7/4)$ og $P(t) = 100\,000e^{t\ln(7/4)}$.)

På grunn av den nevnte egenskapen ved eksponensialfunksjonen, er dette funksjonsuttrykket uavhengig av for hvilke t-verdier årsskiftene skjer.

Løsningsalternativ 2: Vi tenker oss at bestanden øker fra $P(t)$ til $P(t)+P(t)-\frac{1}{4}P(t) = \frac{7}{4}P(t)$ med jevn hastighet gjennom året for $t = 0, 1, 2, \ldots$. Det vil si,

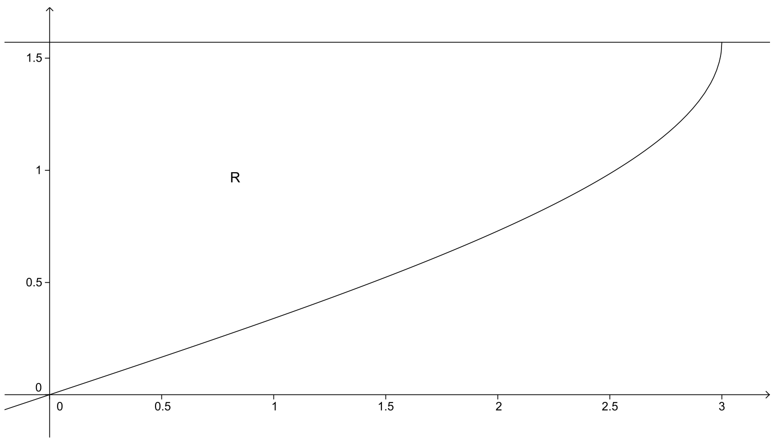
$$P(t) = \begin{cases} P(0)\cdot\frac{7}{4}\cdot t = 100\,000\cdot\frac{7}{4}\cdot t & \text{for } 0 \le t < 1, \\ P(1)\cdot\frac{7}{4}\cdot t = 100\,000\left(\frac{7}{4}\right)^2 t & \text{for } 1 \le t < 2, \\ P(2)\cdot\frac{7}{4}\cdot t = 100\,000\left(\frac{7}{4}\right)^3 t & \text{for } 2 \le t < 3, \quad \text{o.s.v.} \end{cases}$$

Dette funksjonsuttrykket er avhengig av at året starter akkurat ved $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$ o.s.v.

Det finnes naturligvis flere mulig løsninger, men disse to er kanskje de to mest naturlige.

Oppgave 7

a) For å finne arealet A av R, trenger vi en figur som viser hvordan R i hovedsak ser ut:



Vi må velge om vi skal dele R i horisontale eller vertikale striper.

Valg 1: Horisontale striper.

- Vi styrer hvilken stripe vi ser på med y.
- Bredden på stripen ved y er Δy.
- Lengden på stripen ved y er $(x_{\text{høyre}} - x_{\text{venstre}})$ der $x_{\text{venstre}} = 0$ og $x_{\text{høyre}}$ er gitt ved at $y = \arcsin(x/3)$, det vil si $x/3 = \sin y$, og derved $x = 3\sin y$.
- For å få med alle stripene, må y gå fra $y = 0$ til $y = \pi/2$.

Dette gir

$$A = \int_{y=0}^{\pi/2} (x_{\text{høyre}} - x_{\text{venstre}}) dy = \int_0^{\pi/2} (3\sin y - 0) dy = 3\int_0^{\pi/2} \sin y\, dy$$
$$= 3\Big[-\cos y\Big]_0^{\pi/2} = 3(-0-(-1)) = 3.$$

Valg 2: Vertikale striper.

- Vi styrer hvilken stripe vi ser på med x.
- Bredden på stripen ved x er Δx.
- Høyden på stripen er $(y_{\text{oppe}} - y_{\text{nede}})$ der $y_{\text{oppe}} = \pi/2$ og $y_{\text{nede}} = \arcsin(x/3)$
- For å få med alle stripene, må x gå fra $x = 0$ til $x = 3$.

Dette gir

$$A = \int_{x=0}^{3} (y_{\text{oppe}} - y_{\text{nede}}) dx = \int_0^3 \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{x}{3}\right) dx$$

som er et adskillig verre integral å beregne. Men har man en god tabell, kommer man i mål også her:

$$A = \left[\frac{\pi x}{2} - \left(x\arcsin\frac{x}{3} + \sqrt{3^2 - x^2}\right)\right]_0^3 = \frac{3\pi}{2} - 3\arcsin 1 - \sqrt{0} - 0 + 0 + \sqrt{9} = \frac{3\pi}{2} - 3\cdot\frac{\pi}{2} + 3 = 3.$$

b) Omkretsen til R består av

- y-intervallet fra 0 til $\pi/2$ som har lengde $L_1 = \pi/2$,
- linjestykket $y = \pi/2$ fra $x = 0$ til $x = 3$ som har lengde $L_2 = 3$, og
- kurven $y = \arcsin x$ for $0 \le x \le 3$ som er akkurat det samme som kurven $x = 3\sin y$ for $0 \le y \le \pi/2$ som har lengde

$$L_3 = \int_{y=0}^{y=\pi/2} \sqrt{dx^2 + dy^2} = \int_{y=0}^{y=\pi/2} \sqrt{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + 1} = \int_0^{\pi/2} \sqrt{x'(y)^2 + 1}\, dy$$

der $x(y) = 3\sin y$ og derfor $x'(y) = -3\sin y$. Derfor er

$$L_3 = \int_{y=0}^{\pi/2} \sqrt{1 + (-3\cos y)^2}\, dy = \int_{y=0}^{\pi/2} \sqrt{1 + 9\cos^2 y}\, dy = \int_{t=0}^{\pi/2} \sqrt{1 + 9\cos^2 t}\, dt$$

der den siste overgangen følger fordi navnet på integrasjonsvariabelen er uten betydning i et bestemt integral.

Derved er $L = L_1 + L_2 + L_3$ som gir resultatet.

Vi bruker trapesmetoden med 3 delintervaller til å bestemme en tilnærmet verdi for L_3, og derved for L.

- Vi deler intervallet $[0, \frac{\pi}{2}]$ i tre like lange delintervaller. Delestrekene havner da i punktene $x = \pi/6$ og $x = \pi/3$.

- Lengden av hvert delintervall er $\pi/6$.
- Ved trapesmetoden er derved

$$L_3 \approx \frac{\pi}{6} \cdot \frac{1}{2} \left(f(0) + 2f\left(\frac{\pi}{6}\right) + 2f\left(\frac{\pi}{3}\right) + f\left(\frac{\pi}{2}\right) \right)$$

der $f(x) = \sqrt{1 + 9\cos^2 x}$. Det vil si,

$$\begin{aligned} L_3 &\approx \frac{\pi}{12} \left(\sqrt{1+9} + 2\sqrt{1 + 9 \cdot \frac{3}{4}} + 2\sqrt{1 + 9 \cdot \frac{1}{4}} + \sqrt{1+0} \right) \\ &= \frac{\pi}{12} \left(\sqrt{10} + 2\sqrt{\frac{31}{4}} + 2\sqrt{\frac{13}{4}} + 1 \right) \approx 3.4913, \end{aligned}$$

slik at

$$L \approx 3 + \frac{\pi}{2} + 3.4913 \approx 8.0620.$$