Løsningsforslag for eksamen i brukerkurs i matematikk A (MA0001)

Bokmål
Tirsdag 13. desember 2011
Tid: 09:00 – 13:00 (4 timer)

Alle svar skal begrunnes, og det skal være med så mye mellomregning at fremgangsmåten fremgår tydelig av besvarelsen.

Oppgave 1 Det blir utført målinger av nikkelforurensningen i en innsjø en gang i måneden ved å måle antall milligram nikkel per liter vann ($1\,\mathrm{L}{=}1\,\mathrm{dm}^3$). Målingene blir lagret som følgen $a_0, a_1, a_2, \ldots$. Etter hvert viser det seg at følgen ser ut til å tilfredsstille formelen $a_n = 0{,}01\left(\frac{55}{54}\right)^n$.

a) Vis at a_n kan beskrives ved formelen: $a_n = \frac{55}{54}a_{n-1}$, $a_0 = 0{,}01$.

Det første vi skal legge merke til er at man her kan bruke induksjon for å bevise det, dette er dog ikke nødvendig. Det finnes en enklere metode.
Så det er to ting vi må vise:

1. At a_0 stemmer.
2. At a_n stemmer for $n = 1, 2, \ldots$.

Dette ligner litt på induksjon, men er ikke helt likt. Vi gjør som følger:

1. $a_0 = 0{,}01\left(\frac{55}{54}\right)^0 = 0{,}01 \cdot 1 = 0{,}01$. Så a_0 stemmer.
2. $a_n = 0{,}01\left(\frac{55}{54}\right)^n = 0{,}01 \cdot \frac{55}{54} \cdot \left(\frac{55}{54}\right)^{n-1} = \frac{55}{54} \cdot 0{,}01 \cdot \left(\frac{55}{54}\right)^{n-1} = \frac{55}{54}a_{n-1}$. Så a_n stemmer for $n = 1, 2, \ldots$ (merk at "kravet" $n = 1, 2, \ldots$ bare kommer av at vi har definert det rekursivt og dermed må ha en startverdi slik at n ikke kan være lik 0).

Dermed har vi vist det vi ønsket å vise.

Man har bestemt at 0,02 milligram per liter vann skal være grensen for hvor mye nikkel det kan være i vannet før det ansees å være skadelig. Det tar lang tid å skille ut nikkel fra innsjøen, derfor er det viktig å gjøre tiltak mot økningen av mengden nikkel i vannet tidlig. Man ønsker derfor å bruke målingene for å si noe om hvordan det går med mengden nikkel i vannet i fremtiden.

b) Utifra målingene som er gjort, hvordan ser det ut til at det går med innholdet av nikkel i det lange løp (hva går a_n mot når $n \to \infty$)? Ser det ut til å bli nødvendig å gjøre tiltak for å hindre økningen av mengden nikkel i vannet?

Så vi må se på grenseverdien til sekvensen for å sjekke om denne går over den tilatte verdien.
$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} 0{,}01\left(\frac{55}{54}\right)^n = \infty$. Merk at vi brukte beskrivelsen i eksempel 12 side 75 i boka for å avgjøre grenseverdien.

Svar: $\underline{\underline{\text{I det lange løp ser det ut til at mengden nikkel i vannet vokser ubegrenset,}}}$ $\underline{\underline{\text{dermed ser det ut til å bli nødvendig å gjøre tiltak for å hindre økningen av}}}$ $\underline{\underline{\text{mengden nikkel i vannet.}}}$

Oppgave 2 Finn følgende grenseverdier eller forklar hvorfor de ikke eksisterer

a) $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+2x+3}{5x^2+3}$

$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+2x+3}{5x^2+3} = \lim_{x\to\infty} \frac{1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}{5+\frac{3}{x^2}} = \frac{1}{5}$ (Vi deler med x^2 over og under i overgangen mellom første og midterste uttrykk).

Svar: $\underline{\underline{\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+2x+3}{5x^2+3} = \frac{1}{5}}}$

b) $\lim_{x\to\sqrt{3}} \left[\sin(x^2-3) + 2e^{x^2} - 3x^4 + 2\right]$

$\lim_{x\to\sqrt{3}} \left[\sin(x^2-3) + 2e^{x^2} - 3x^4 + 2\right] = \sin((\sqrt{3})^2-3) + 2e^{(\sqrt{3})^2} - 3(\sqrt{3})^4 + 2 = \sin 0 + 2e^3 - 25 = 2e^3 - 25.$

Svar: $\underline{\underline{\lim_{x\to\sqrt{3}} \left[\sin(x^2-3) + 2e^{x^2} - 3x^4 + 2\right] = 2e^3 - 25}}$

c) $\lim_{x\to\pi}\left[\sin(x)\cos\left(\frac{1}{x-\pi}\right)\right]$

Her er det ikke noe rett fram løsning, siden vi ikke kan finne $\cos\infty$, men ved hjelp av klemmelemma (sandwich theorem) klarer vi det. For å få det til må man først dele det opp i to grenser, nemlig $x\to\pi^+$ og $x\to\pi^-$, og vise at disse to er like. Får vi til det har vi også funnet grenseverdien når $x\to\pi$.

Vi vet at $-1\le\cos\left(\frac{1}{x-\pi}\right)\le 1$. Videre vet vi at $\sin x\le 0$ når $x\ge\pi$ og at $\sin x\ge 0$ når $x\le\pi$. å vi må se på grensa fra høyre og fra venstre (altså når $x\to\pi^+$ og når $x\to\pi^-$).
Ser først på $\lim_{x\to\pi^-}\left[\sin(x)\cos\left(\frac{1}{x-\pi}\right)\right]$: Så nå vil $\sin(x)\ge 0$ for $x\in\left(\frac{2\pi}{3},\pi\right)$. Vi har at $-1\le\cos\left(\frac{1}{x-\pi}\right)\le 1$, ganger vi så inn med $\sin(x)$ i hvert ledd får vi $-\sin x\le\sin(x)\cos\left(\frac{1}{x-\pi}\right)\le\sin(x)$. Vi har $\lim_{x\to\pi^-}-\sin(x)=\lim_{x\to\pi^-}\sin(x)=0$, og dermed ved klemmelemma er $\lim_{x\to\pi^-}\left[\sin(x)\cos\left(\frac{1}{x-\pi}\right)\right]=0$.

Ser så på $\lim_{x\to\pi^+}\left[\sin(x)\cos\left(\frac{1}{x-\pi}\right)\right]$: Så nå vil $\sin(x)\le 0$ for $x\in\left(\pi,\frac{4\pi}{3}\right)$. Vi har at $-1\le\cos\left(\frac{1}{x-\pi}\right)\le 1$, ganger vi så inn med $\sin(x)$ i hvert ledd får vi $-\sin x\ge\sin(x)\cos\left(\frac{1}{x-\pi}\right)\ge\sin(x)$ (merk at vi snudde ulikhetene siden $\sin(x)$ er negativ på det intervallet vi ser på). Vi har $\lim_{x\to\pi^+}-\sin(x)=\lim_{x\to\pi^+}\sin(x)=0$, og dermed ved klemmelemma er $\lim_{x\to\pi^+}\left[\sin(x)\cos\left(\frac{1}{x-\pi}\right)\right]=0$.

Så vi har funnet at $\lim_{x\to\pi^-}\left[\sin(x)\cos\left(\frac{1}{x-\pi}\right)\right]=\lim_{x\to\pi^+}\left[\sin(x)\cos\left(\frac{1}{x-\pi}\right)\right]=0$, og dermed er $\lim_{x\to\pi}\left[\sin(x)\cos\left(\frac{1}{x-\pi}\right)\right]=0$.

Svar: $\underline{\underline{\lim_{x\to\pi}\left[\sin(x)\cos\left(\frac{1}{x-\pi}\right)\right]=0.}}$

Oppgave 3 Tettheten y_i i en bakteriekultur målt i antall bakterier per cm^2 ble målt ved ulike tidspunkter x_i (x_i er målt i minutter). Da man plottet punktene fant man at $(x, \ln y)$-plottet ga en rett linje gjennom punktene $\left(\frac{-\ln 2}{5}, \ln 4\right)$ og $(\ln 2, \ln 2^8)$.

a) Finn ligningen for linja som beskriver forholdet mellom $\ln y$ og x (altså linja som går gjennom punktene over).

Har fått oppgitt to punkter. Bruker disse til å finne ligningen for linja mellom dem.
Stigningstall:
$m = \frac{\ln 2^8 - \ln 4}{\ln 2 - \left(\frac{-\ln 2}{5}\right)} = \frac{\ln 2^8 - \ln 2^2}{\frac{6 \ln 2}{5}} = \frac{5(8 \ln 2 - 2 \ln 2)}{6 \ln 2} = \frac{5(6 \ln 2)}{6 \ln 2} = 5$
Videre bruker vi ligningen for ei linje (husk at det nå er $\ln y$ og x som må brukes siden det er disse verdiene som ligger på ei rett linje).
$\ln y - \ln 4 = 5\left(x + \frac{\ln 2}{5}\right) = 5x + \ln 2$
$\ln y = 5x + \ln 2 + 2 \ln 2 = 5x + 3 \ln 2 = 5x + \ln 8.$

Svar: Ligningen for linja er $\ln y = 5x + \ln 8$.
Merknad: Mange lurte på om man skulle bruke svaret her eller det som ble oppgitt i teksten mellom a) og b). Som vi ser spiller dette ingen rolle hva man har valgt, da det er samme uttrykk (jeg oppga altså svaret i a) før oppgave b) og c) for at ingen skulle oppleve å ikke kunne gjøre b) og c) fordi de ikke får til a)).

I resten av oppgaven kan du bruke at ligningen for linja er gitt ved $\ln y = 5x + \ln 8$.

b) Bruk ligningen for $\ln y$ over til å finne et uttrykk for $y = f(x)$.

Her bruker vi ligingen for linja over, og løser for y.
$\ln y = 5x + \ln 8$
$e^{\ln y} = e^{5x + \ln 8}$
$y = e^{5x} e^{\ln 8}$
$y = 8e^{5x}$

Svar: Uttrykket for y er $y = 8e^{5x}$

c) Etter hvor mange minutter er tettheten $y = 256$ bakterier per cm^2?

Setter y lik 256 og løser for x:
$y = 8e^{5x} = 256$
$\ln 8e^{5x} = \ln 256$
$\ln 8 + \ln e^{5x} = \ln 256$
$5x = \ln 256 - \ln 8$
$5x = \ln \frac{256}{8}$
$x = \frac{\ln 32}{5}$

Svar: $\underline{\underline{\text{Etter } x = \frac{32}{5} \text{ minutter er tettheten } y = 256 \text{ bakterier per cm}^2}}$.

Oppgave 4

a) Finn den deriverte av y for $y = \frac{\sin x + 2}{x^2 + 1}$

Her ser vi at vi må bruke brøkregelen, vi får da følgende:

$$\frac{d}{dx}y = \frac{d}{dx}\frac{\sin x + 2}{x^2 + 1} = \frac{(\cos x)(x^2 + 1) - (\sin x + 2)(2x)}{(x^2 + 1)^2} = \frac{(x^2 + 1)\cos x - 2x\sin x - 4x}{(x^2 + 1)^2}$$

Svar: $\underline{\underline{\frac{d}{dx}y = \frac{(x^2+1)\cos x - 2x\sin x - 4x}{(x^2+1)^2}}}$.
Merknad: Det var litt utydelig om utrykket over brøkstreken skulle være $\sin(x + 2)$ eller $\sin(x)+2$, man får godkjent uansett hvordan man har tolket uttrykket, gitt at man har regnet riktig (ingen av uttrykkene gjør oppgaven betydelig lettere/vanskeligere enn det andre).

b) Finn den deriverte av y ved implisitt derivasjon gitt at $x \ln y = x^3$

Det første vi merker oss er at vi kan dele med x på begge sider for å forenkle uttrykket slik at vi får $\ln y = x^3$. Vi begynner med å se på hva lny derivert blir:

$$\begin{aligned} g(x) &= \ln x & g'(x) &= \frac{1}{x} \\ h(x) &= y & h'(x) &= \frac{dy}{dx} \end{aligned}$$

Får da at $\frac{d}{dx} \ln y = \frac{1}{y}\frac{dy}{dx}$. Nå kan vi se på hele uttrykket.

$$\begin{aligned} \ln y &= x^2 \\ \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} &= 2x \\ \frac{dy}{dx} &= 2xy \end{aligned}$$

Svar: $\underline{\underline{\frac{dy}{dx} = 2xy.}}$

Merknad: Du kan også derivere uttrykket uten å dele med x på begge sider først. Da blir uttrykket noe styggere. Hvis man finner funksjonen for y og setter inn (det var ikke meningen at man skulle finne uttrykket for y og gjøre om), ser man at svarene man får er de samme. Man får riktig uansett om man har delt med x først eller ikke så lenge man har regnet riktig.

Oppgave 5 La $f(x) = \cos x + \sin x$

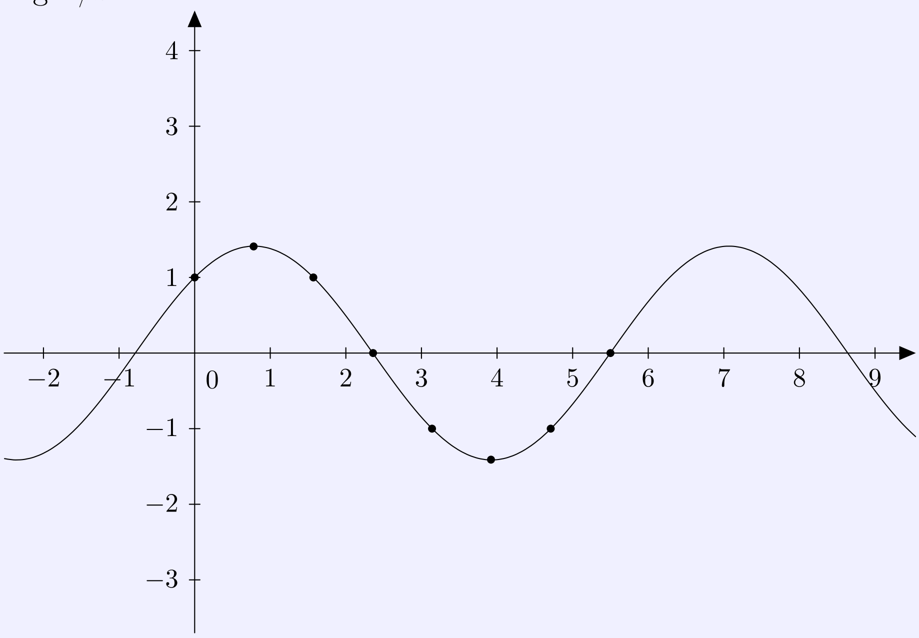
a) Skisser grafen til $f(x)$ (lag tabell med verdier for x og $f(x)$ hvor du tar med minst tre verdier for x).

Merk først følgende: Siden både $\sin x$ og $\cos x$ er periodiske med periode 2π har også $f(x)$ periode 2π, vi trenger derfor bare å se hvordan den ser ut på et intervall med størrelse 2π, for deretter å gjenta funksjonen slik den blir i dette intervallet.

Tabell:

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$
$f(x)$	1	$\sqrt{2}$	1	0	-1	$-\sqrt{2}$	-1	0

Figur/Skisse:



b) Finn volumet av figuren som oppstår når du dreier $f(x) =$ om x-aksen mellom $x = 0$ og $x = \frac{\pi}{2}$.

Når vi dreier dene flaten rundt vil grunnflaten være en sirkel, med radius $f(x)$. Fra boka har vi at vi skal bruke følgende formell (se nederst side 316):

$$\text{Volum} = \int_0^{\pi/2} \pi[f(x)]^2 dx$$

Vi setter inn i formelen og får:

$$\begin{aligned}
\text{Volum} &= \int_0^{\pi/2} \pi[f(x)]^2 dx \\
&= \int_0^{\pi/2} \pi[\sin x + \cos x]^2 dx \\
&= \pi \int_0^{\pi/2} (\sin^2 x + 2\sin(x)\cos(x) + \cos^2 x) dx \\
&= \pi \int_0^{\pi/2} (2\sin(x)\cos(x) + 1) dx \\
&= \pi \int_0^{\pi/2} (2\sin(x)\cos(x) + 1) dx \\
&= \pi \int_0^{\pi/2} (\sin(2x) + 1) dx \\
&= \pi \left[\frac{-1}{2}\cos(2x) + x \right]_0^{\pi/2} \\
&= \pi \left(\frac{-1}{2}\cos(\pi) + \frac{\pi}{2} - \frac{-1}{2}\cos(0) - 0 \right) \\
&= \pi \left(\frac{1}{2} + \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \right) \\
&= \frac{2\pi + \pi^2}{2}
\end{aligned}$$

Svar: Volumet til figuren som oppstår blir $\frac{2\pi+\pi^2}{2}$.