Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

EKSAMEN I MA0001 BRUKERKURS A I MATEMATIKK

LØSNINGSFORSLAG

Oppgave 1

Vi ser først at alle løsninger av ligningen må være > 1 fordi logaritmen til et tall ≤ 0 er ikke definert. For $x > 1$ er

$$\begin{aligned} \ln(x+1) + \ln(x-1) &= 1 \\ (x+1)(x-1 &= e^1 \\ x^2 - 1 &= e \\ x &= \sqrt{e+1}. \end{aligned}$$

(Verdien $x = -\sqrt{e+1}$ er ikke en løsning fordi da er $x - 1 < 0$.)

Oppgave 2

a) Funksjonen har en invers hvis og bare hvis den er en-entydig. Siden

$$f'(x) = 5(x-1)^4 + e^x > 0 \qquad \text{for alle } x \in \mathbb{R}$$

er funksjonen voksende og derved en-entydig på hele $\mathbb{R}$. Altså har f en invers funksjon.

b) Tangenten til grafen til $y = f(x)$ i origo har en ligning

$$y = f(0) + f'(0)(x-0) = 0 + [5(0-1)^4 + e^0]x = (5+1)x = 6x.$$

Det vil si, tangenten har ligningen $y = 6x$.

Tangenten til grafen til $x = f^{-1}(y)$ i origo er akkurat samme linjen som tangenten til grafen til $y = f(x)$ i origo, fordi de to grafene er identiske. Tangenten til grafen til $x = f^{-1}(y)$ i origo har derfor også ligningen $y = 6x$.

I oppgaven spurte de om tangenten til $y = f^{-1}(x)$. Vi må altså bytte roller for x og y. Tangenten til grafen til $y = f^{-1}(x)$ i origo har derfor ligningen $y = \frac{1}{6}x$.

Oppgave 3 Studenten starter med et lån på størrelse L_0.
Etter 1 år er lånet vokst til $L_1 = L_0 + \frac{10}{100}L_0 = 1.1L_0$.
Etter 2 år er lånet vokst til $L_2 = L_1 + \frac{10}{100}L_1 = 1.1L_1 = 1.1^2L_0$.

$\vdots$

Etter 5 år er lånet vokst til $L_5 = 1.1^5L_0$.

Det har altså økt med $L_5 - L_0$, noe som utgjør

$$\frac{(L_5 - L_0)\cdot 100}{L_0}\,\% = \frac{(1.1^5L_0 - L_0)\cdot 100}{L_0}\,\% = (1.1^5 - 1)\cdot 100\,\%.$$

Dette er tilnærmet lik 61 %.

Oppgave 4 At punktene $(\ln x, \ln y)$ ligger på en rett linje, betyr at

$$\ln y = a\ln x + b$$

for to reelle tall a og b. (Målingene er tatt i forskjellige dybder x, så punktene ligger ikke på en vertikal linje.)

Siden

$$\ln x = \frac{\log_{10} x}{\log_{10} e},$$

(noe man kan se ved følgende argument: La $p = \ln x$. Da er $e^p = x$ og derved $\log_{10} e^p = p\cdot\log_{10} e = \log_{10} x$,) så er

$$\ln y = a\,\frac{\log_{10} x}{\log_{10} e} + b$$
$$\ln y = c\,\log_{10} x + b$$

der $c = a/\log_{10} e$ også er en reell konstant. $u = cv + b$ er en ligning for en rett linje i uv-planet. Den andre studenten får derfor også punkter som ligger på en rett linje.

Oppgave 5

a) Kurven $y = px^2$ er en parabel med akse langs den positive y-aksen og bunnpunkt i origo. Dette er en glatt kurve

Linjen som går gjennom de to punktene $(-\frac{1}{2}, 3p)$ og $(\frac{1}{2}, p)$ er også glatt. Hjørnepunktene på randen til D er derfor bare de to skjæringspunktene mellom parabelen og linjen.

Linjen har stigningstall $m = (p - 3p)/(\frac{1}{2} - (-\frac{1}{2})) = -2p$, og har derfor en ligning

$$y = 3p - 2p\left(x - \left(-\frac{1}{2}\right)\right) = 3p - 2px - p = 2p(1 - x).$$

x-koordinatene til skjæringspunktene mellom linjen og parabelen er gitt ved ligningen

$$2p(1-x) = px^2$$

der $p > 0$. Vi kan altså forkorte med p og får at

$$x^2 + 2x - 2 = 0.$$

Denne andregradsligningen har to løsninger, nemlig

$$x_1 = \frac{-2 + \sqrt{2^2 + 4 \cdot 2}}{2} = -1 + \sqrt{3} \quad \text{og} \quad x_2 = \frac{-2 - \sqrt{2^2 + 4 \cdot 2}}{2} = -1 - \sqrt{3}.$$

Dette er x-koordinatene til skjæringspunktene. y-koordinatene er henholdsvis

$$y_1 = 2p(1 - x_1) = 2p(2 - \sqrt{3}) \quad \text{og} \quad y_2 = 2p(1 - x_2) = 2p(2 + \sqrt{3}).$$

Hjørnepunktene er derfor

$$\left(-1 - \sqrt{3},\ 2p\left(2 + \sqrt{3}\right)\right) \quad \text{og} \quad \left(-1 + \sqrt{3},\ 2p\left(2 - \sqrt{3}\right)\right).$$

b) Arealet av D er gitt ved integralet

$$A = \int_{x_2}^{x_1} \left(2p(1-x) - px^2\right) dx = p \int_{-1-\sqrt{3}}^{-1+\sqrt{3}} (2 - 2x - x^2) dx.$$

Ved analysens fundamentalteorem er

$$\begin{aligned} A &= p\left[2x - x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_{-1-\sqrt{3}}^{-1+\sqrt{3}} \\ &= p\Bigg[2(-1+\sqrt{3}) - (-1+\sqrt{3})^2 - \frac{(-1+\sqrt{3})^3}{3} \\ &\quad - \left(2(-1-\sqrt{3}) - (-1-\sqrt{3})^2 - \frac{(-1-\sqrt{3})^3}{3}\right)\Bigg] = 4p\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Oppgave 6 Populasjon vokser med hastighet

$$v(t) = P'(t) = 0 + \frac{2(t+1-a)(t+1) - (t+1-a)^2 \cdot 1}{(t+1)^2} = \frac{(t+1)^2 - a^2}{(t+1)^2} = 1 - \frac{a^2}{(1+t)^2}$$

for $0 \leq t \leq 4$. Når t øker, øker nevneren i den siste brøken, slik at verdien av brøken avtar. Siden $v(t) = 1 -$ (denne brøken), øker $v(t)$ når t øker. Altså er $v(t)$ størst når t er størst.

Konklusjon: hastigheten øker raskest ved tidspunkt $t = 4$.

Alternativ løsning:
For å finne den maksimale hastigheten ser vi på den deriverte av v:

$$v'(t) = \frac{2(t+1)(t+1)^2 - [(t+1)^2 - a^2] \cdot 2(t+1)}{(t+1)^2} = \frac{2a^2}{t+1} \quad \text{for } \ 0 \leq t \leq 4.$$

Vi ser at $v'(t) > 0$ i hele intervallet. Det vil si, $v(t)$ vokser i hele intervallet. Maksimum for $v(t)$ ligger derfor i høyre endepunkt $t = 4$ av intervallet. Altså vokser populasjonen raskest ved $t = 4$.