Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Anders S. Lund (735 91 625 / 41 45 19 15)

Eksamen i Brukerkurs i matematikk A (MA0001)

Bokmål
Tirsdag 7. august 2012
Tid: 09:00 – 13:00 (4 timer)

Hjelpemidler: Hjelpemiddelkode A
Alle trykte og håndskrevne hjelpemidler tillatt. En kalkulator tillatt.

Sensurfrist: 28. august 2012

Alle svar skal begrunnes, og det skal være med så mye mellomregning at fremgangsmåten fremgår tydelig av besvarelsen.

Oppgave 1 La $(2, 3e^9)$ og $(\ln 4, 12e^7)$ være 2 av flere punkter i (x, y)-koordinatsystemet ((x, y)-planet).

a) Det viser seg at $(x, \ln y)$-plottet av disse punktene ligger på en rett linje, finn ligningen for denne linja (Hint: ligningen for linja skal være på formen $\ln y = ax + b$).

Vi finner først stigningstallet:

$$m = \frac{\ln 12e^7 - \ln 3e^9}{\ln 4 - 2} = \frac{(\ln 12 + 7) - (\ln 3 + 9)}{\ln 4 - 2} = \frac{\ln \frac{12}{3} - 2}{\ln 4 - 2} = \frac{\ln 4 - 2}{\ln 4 - 2} = 1$$

Bruker så stigningtallet til for å finne ligningen til linja:

$$\ln y - \ln 3e^9 = m(x-2) = 1(x-2) = x - 2$$
$$\ln y = x - 2 + \ln e^9 + \ln 3 = x - 2 + 9 + \ln 3 = x + 7 + \ln 3$$

Svar: Ligningen for linja er $\ln y = x + 7 + \ln 3$

I resten av oppgaven kan du bruke at ligningen for linja er gitt ved $\ln y = x + 7 + \ln 3$.

b) Finn ligningen for y som en funksjon av x ved hjelp av ligningen over, og finn ut hva x-verdien må være for at y-verdien skal bli $y = 15e^7$.

Finner ligningen for y utrykt ved hjelp av x:

$$y = e^{\ln y} = e^{x+7+\ln 3} = 3e^{x+7}(= 3e^x e^7)$$

Skal finne x sånn at $y = 15e^7$:

$$\begin{aligned} y = 3e^x e^7 &= 15e^7 \\ e^x e^7 &= 5e^7 \\ e^x &= 5 \\ x &= \ln 5 \end{aligned}$$

Svar: Ligningen for y er $y = 3e^{x+7}$ og $y = 15e^7$ for $x = \ln 5$

Oppgave 2 Finn den deriverte av y for følgende uttrykk (Merk: a) og b) oppgavene er helt uavhengige av hverandre)

a) $y = 3x^5 + 5\sin x + e^{4x} - \sqrt{x}$

$$y' = (3x^5)' + (5\sin x)' + (e^{4x})' - (\sqrt{x})' = 15x^4 - 5\cos x + 4e^{4x} - \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Svar: $y' = 15x^4 - 5\cos x + 4e^{4x} - \frac{1}{2\sqrt{x}}$

b) $y = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{5}$

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(\cos^2 x - \sin^2 x)'(5) - (\cos^2 x - \sin^2 x)(5)'}{(5)^2} \\ &= \frac{(-2\cos x \sin x - 2\cos x \sin x)(5) - (\cos^2 x - \sin^2 x)(0)}{(5)^2} \\ &= \frac{-20\cos x \sin x}{25} = \frac{-4\cos x \sin x}{5} \end{aligned}$$

Svar: $y' = \frac{-4\cos x \sin x}{5}$

Oppgave 3 En populasjon øker med den rekursive formelen $N_{t+1} = 5N_t$, hvor t er tiden målt i antall timer. Etter tiden $t = 2$ timer er det 300 individer i populasjonen.

a) Finn en formell for populasjonen som kun er avhengig av t (altså en formel som ikke er rekursiv, hvor den eneste ukjente er t).

Om man ser i boka, finner man på side 66 at formelen for populasjonen er på formen $N_t = N_0 R^t$, hvor R nå er $R = 5$. Trenger nå bare å finne N_0, størrelsen på populasjonen ved tiden $t = 0$. Vi vet at $N_2 = 300$, og at $N_2 = 5N_1 = 5(5N_0) = 25N_0$. Så $N_0 = \frac{300}{25} = 12$. Dermed blir formelen $N_t = 12 \cdot 5^t$.
Svar: Formelen for populasjonen er gitt ved $N_t = 12 \cdot 5^t$.

b) Hvor stor er populasjonen etter 1/4 døgn?

Etter 1/4 døgn, er tiden som er gått målt i timer $t = 6$. Vi skal altså regne ut N_6. $N_6 = 12 \cdot 5^6 = 187500$.
Svar: Etter 1/4 døgn er størrelsen på populasjonen $N_6 = 187500$ individer

Oppgave 4 Løs følgende integraler

a) $\int_0^{\pi/2} e^{bx} + \sin ax \, \mathrm{d}x$, hvor $a, b \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/2} e^{bx} + \sin ax \, \mathrm{d}x &= \int_0^{\pi/2} e^{bx} \, \mathrm{d}x + \int_0^{\pi/2} \sin ax \, \mathrm{d}x \\
&= \left[\frac{1}{b} e^{bx} - \frac{1}{a} \cos ax \right]_0^{\pi/2} \\
&= \left[\left(\frac{1}{b} e^{\frac{b\pi}{2}} - \frac{1}{a} \cos \pi/2 \right) - \left(\frac{1}{b} e^0 - \frac{1}{a} \cos 0 \right) \right] \\
&= \left[\frac{1}{b} \left(e^{\frac{b\pi}{2}} - 1 \right) + \frac{1}{a} \right]
\end{aligned}$$

Svar: $\int_0^{\pi/2} e^{bx} + \sin ax \, \mathrm{d}x = \left[\frac{1}{b} \left(e^{\frac{b\pi}{2}} - 1 \right) + \frac{1}{a} \right]$

b) $\int\limits_1^\infty \frac{1}{x^{8/5}}\,\mathrm{d}x$

$$\begin{aligned}\int\limits_1^\infty \frac{1}{x^{8/5}}\,\mathrm{d}x &= \lim_{R\to\infty}\int\limits_1^R \frac{1}{x^{8/5}}\,\mathrm{d}x\\ &= \lim_{R\to\infty}\left[\frac{-3}{5}\frac{1}{x^{3/5}}\right]_1^R\\ &= \lim_{R\to\infty}\left[\frac{-3}{5}\left(\frac{1}{R^{3/5}}-1\right)\right]\\ &= \frac{3}{5}\end{aligned}$$

Svar: $\int\limits_1^\infty \frac{1}{x^{8/5}}\,\mathrm{d}x = \frac{3}{5}$

Oppgave 5

a) Finn følgende grenseverdi (eller skriv hvorfor den eventuelt ikke eksisterer)
$\lim\limits_{x\to\infty} \sin x$

Denne grenseverdien eksisterer ikke siden $\sin x$ oscillerer mellom 1 og -1 når x går mot ∞.
Svar: Grenseverdien eksisterer ikke.

b) En kjele vann med gjennomsnittstemperatur $60\,^\circ\mathrm{C}$ settes til avkjøling på et kjølerom som holder $-17\,^\circ\mathrm{C}$. Etter 6 timer har isen (vannet) gjennomsnittstemperatur $-10\,^\circ\mathrm{C}$. Forklar (matematisk) hvorfor vannet (isen) på minst et tidspunkt i løpet av disse 6 timene har hatt gjennomsnittstemperatur $0\,^\circ\mathrm{C}$.

Kall funksjonen for gjennomsnittstemperaturen til vannet for $f(t)$. Trikset her er å anta at $f(t)$ er en kontinuerlig funksjon (dette er en rimelig antagelse). Da kan man med en gang slutte fra skjæringssetningen (Intermediate-Value Theorem, s. 119 i boka) at vannet må ha hatt gjennomsnittstemperatur lik 0 på minst et tidspunkt. Siden funksjonen er kontinuerlig, er den kontinuerlig på den lukkede intervallet på 6 timer det her er snakk om. Videre, hvis vi lar tidspunktet vi setter kjelen inn på være tiden $t = 0$ timer (t måles i timer), så er $f(0) = 60\,°\mathrm{C} > 0$ og $f(6) = -10\,°\mathrm{C} < 0$, og dermed, ved skjæringssetningen, finnes minst et tidpunkt t, slik at $0 < t < 6$ og $f(t) = 0$.