Løsningsforslag til midtsemesterprøven

MA0001 Brukerkurs A, høsten 2009

Oppgavene er løst i den rekkefølgen de står på oppgavesettet på hjemmesiden.

Oppgave 1: Funksjonen f er opplagt kontinuerlig i alle $x \neq 0$. Vi vil at den også skal være kontinuerlig for $x = 0$. Da må $f(0) = c = \lim_{x\to 0} f(x)$. Vi har

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} f(x) &= \lim_{x\to 0} \frac{\sin 3\pi x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin 3\pi x}{3\pi x} \cdot 3\pi \\ &= \lim_{u\to 0} \frac{\sin u}{u} \cdot 3\pi = 1 \cdot 3\pi = 3\pi\end{aligned}$$

der vi har satt $u = 3\pi x$.

Oppgave 2: Funksjonen f er periodisk med periode p dersom $f(x+p) = f(x)$. For funksjonen $f(x) = p^2 \sin(2\pi x/p)$ gjelder

$$f(x+p) = p^2 \sin \frac{2\pi(x+p)}{p} = p^2 \sin\left(\frac{2\pi x}{p} + \frac{2\pi p}{p}\right) = p^2 \sin\left(\frac{2\pi x}{p} + 2\pi\right) = p^2 \sin \frac{2\pi x}{p}$$

fordi $\sin(u + 2\pi) = \sin u$.

Oppgave 3: Vi ser først på likheten $|kx+4| = |x+6|$. Den holder dersom enten

$$(1) \quad kx + 4 = x + 6 \quad \text{eller} \quad (2) \quad kx + 4 = -(x+6).$$

Fra (1) følger det at $(k-1)x = 2$, det vil si $x = 2/(k-1)$.

Fra (2) følger det at $(k+1)x = -10$, det vil si $x = -10/(k+1)$.

Ingen av disse to punktene kan høre med til løsningsmengden for ulikheten (fordi de gir likhet). Derved gjenstår bare to muligheter. Enten holder ikke ulikheten for noen x, eller så holder den for $-10/(k+1) < x < 2/(k-1)$.

Siden $f(x) = |kx+4| - |x+6|$ er kontinuerlig, er det nok å kontrollere om $x = 0$ er en løsning.

For $x = 0$ er $|kx+4| = 4$ og $|x+6| = 6$, slik at ulikheten holder. Altså er løsningen intervallet fra $-10/(k+1)$ til $2/(k-1)$.

Oppgave 4: $W'(t)$ viser hvordan mengden av stoffet endres i forhold til endring i t. Det vil si, $W'(t)$ sier hvor mye $W(T)$ endrer seg per tidsenhet ved tidspunkt t. Det vil si, $W'(t)$ gir endringshastigheten (endringsraten) for $W(t)$. Siden $W(t)$ avtar, er $W'(t) < 0$. Det er også klart at $W(t)$ avtar saktere og saktere fordi det er snakk om eksponensiell nedbrytning. Altså at farten $|W'(t)|$ som $W(t)$ avtar med blir mindre og mindre. Siden $W'(t) < 0$ betyr det at $W'(t)$ øker.

$W''(t)$ sier hvordan $W'(t)$ endrer seg per tidsenhet ved tidspunkt t. Siden $W'(t)$ øker, er $W''(t) > 0$. Det går altså fint an at $W''(t) = 1/100$. Og som sagt over, at $W'(t)$ øker, betyr at nedbrytningsfarten $|W'(t)|$ avtar.

Riktig svar er derfor: Akkurat 1 time etter at mengden var 20 kg avtar mengden med en hastighet som avtar svakt med 0.01 per time.

Oppgave 5:

$$\begin{aligned}
W(t) &= W_0 2^{-t/5730} \\
W'(t) &= W_0 2^{-t/5730} \cdot \frac{-1}{5730} \cdot \ln 2 \\
W''(t) &= W_0 2^{-t/5730} \cdot \frac{-1}{5730} \cdot \ln 2 \cdot \frac{-1}{5730} \cdot \ln 2 = \frac{W_0(\ln 2)^2}{32832900} \cdot 2^{-t/5730}.
\end{aligned}$$

Oppgave 6: Vi har at (t, u) der $u = \ln y$ ligger på den rette linjen $u - 3 = m(t - 0)$, det vil si $u = 3 + mt$ der $m = 1/2$. Dette betyr at

$$\begin{aligned}
\ln y &= 3 + \frac{1}{2} t \\
y &= e^{3+t/2} = e^3 \cdot e^{t/2}.
\end{aligned}$$

Oppgave 7: Vi setter $y = f(x)$ slik at

$$y = \frac{x}{x+1} \quad \text{for } x > -1.$$

Vi løser denne ligningen med hensyn på x:

$$\begin{aligned}
y(x+1) &= x \\
yx + y &= x \\
y &= x - yx = (1-y)x \\
x &= \frac{y}{1-y}.
\end{aligned}$$

Den inverse funksjonen er derfor $f^{-1}(y) = y/(1-y)$. Vi skifter navn på den variable og får $f^{-1}(x) = x/(1-x)$.

Oppgave 8:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= x\,\sin(\pi x^2)\\
f'(x) &= \sin(\pi x^2) + x\cdot\Big(\sin(\pi x^2)\Big)' = \sin(\pi x^2) + x\Big(\cos(\pi x^2)\Big)\cdot 2\pi x\\
f'(1) &= \sin\pi + 1\cdot\Big(\cos\pi\Big)\cdot 2\pi\cdot 1 = 0 + (-1)\cdot 2\pi = -2\pi.
\end{aligned}
$$

Oppgave 9: Når 10% av $W(t)$ er gått over til nitrogen, er det 90% igjen av den opprinnelige mengden av $W(t)$. Det spiller ingen rolle når vi starter beregningene, for dette er eksponensiell nedbrytning. Vi starter derfor ved $T = 0$. Da er mengden W_0. Tiden t det tar til $W(t)$ er redusert fra W_0 til $W_0 \cdot 90\% = W_0 \cdot 9/10$ er gitt ved

$$
\begin{aligned}
\frac{9}{10}\cdot W_0 &= W_0\,2^{-t/5730}\\
\frac{9}{10} &= 2^{-t/5730}\\
\ln\frac{9}{10} &= -\frac{t}{5730}\,\ln 2\\
-\frac{t}{5730} &= \frac{\ln(9/10)}{\ln 2} = \frac{\ln 9 - \ln 10}{\ln 2}\\
t &= -\frac{\ln 9 - \ln 10}{\ln 2}\cdot 5730 = \frac{5730(\ln 10 - \ln 9)}{\ln 2}.
\end{aligned}
$$

Oppgave 10:

$$
\begin{aligned}
\ln x &= (\ln a)^2 + \ln 2\\
e^{\ln x} &= e^{(\ln a)^2 + \ln 2} = e^{(\ln a)(\ln a)}\cdot e^{\ln 2}\\
x &= (e^{\ln a})^{\ln a}\cdot 2\\
x &= 2\,a^{\ln a}.
\end{aligned}
$$