Midtsemesterprøve i MA0001, 2010
Løsningsforslag

Problem. Tangenten til kurven $y = \ln \dfrac{e^{x^2}}{\sqrt[3]{x}}$ i punktet $(1,1)$ har ligning

$y = \dfrac{5}{3}x - \dfrac{2}{3}$.

Begrunnelse. Problemet kan løses på flere måter, men siden

$$y = f(x) = \ln \frac{e^{x^2}}{\sqrt[3]{x}} = \ln e^{x^2} - \ln x^{1/3} = x^2 - \frac{1}{3}\ln x,$$

er

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = 2x - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x}.$$

Tangenten har derfor ligning

$$y = f(1) + f'(1)(x-1) = 1 + \left(2 \cdot 1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1}\right)(x-1) = 1 + \frac{5}{3}(x-1) = \frac{5}{3}x - \frac{2}{3}.$$

Problem. Hvilket påstand nedenfor er *ikke* riktig?

Svar: $\sin^2 2x + \cos^2 2x = 2$.

Begrunnelse. $\sin^2 u + \sin^2 u = 1$ uansett hvilken verdi vinkelen u har. Dette gjelder også om $u = 2x$.

Problem. Uttrykket $\log_7 x^3 - \log_7 x^{5/2} - \log_{49} x$ kan forenkles til 0.

Begrunnelse. Vi ser først at $y = \log_{49} x$ er det samme som å si at $x = 49^y$. Siden $49 = 7^2$, er altså $x = (7^2)^y = 7^{2y}$, slik at $2y = \log_7 x$, og derfor

$$\log_{49} x = y = \frac{1}{2}\log_7 x = \log_7 x^{1/2}.$$

Uttrykket i oppgaven kan derfor forenkles til

$$\log_7 x^3 - \log_7 x^{5/2} - \log_7 x^{1/2} = \log_7 \frac{x^3}{x^{5/2}x^{1/2}} = \log_7 1 = 0.$$

Problem. Et radioaktivt stoff har halveringstid på 114 døgn. Hvor lang tid bruker stoffet på å reduseres med 2/3?

Svar: $114\frac{\ln 3}{\ln 2}$ døgn.

Begrunnelse. La $P(t)$ betegne mengde radioaktivt stoff ved tidspunkt t (målt i døgn). Da er

$$P(t) = C \cdot e^{rt}$$

der C og r er to konstanter som er avhengige av situasjonen.

Siden $P(114) = \frac{1}{2}P(0)$, er

$$C \cdot e^{114r} = \frac{1}{2} C \cdot e^0$$
$$e^{114r} = \frac{1}{2}.$$

Ved å ta naturlig logaritme på hver side av likhetstegnet får vi derfor at

$$114r = \ln\frac{1}{2} = -\ln 2,$$

slik at

$$r = -\frac{\ln 2}{114}.$$

Vi søker en t som er slik at $P(t) = P(0) - \frac{2}{3}P(0) = \frac{1}{3}P(0)$. Det vil si,

$$C \cdot e^{rt} = \frac{1}{3} C \cdot e^0$$
$$e^{rt} = \frac{1}{3}$$
$$rt = \ln\frac{1}{3} = -\ln 3$$
$$t = -\frac{\ln 3}{r} = \frac{\ln 3}{\ln 2} \cdot 114.$$

Problem. Finn et uttrykk for funksjonen $y = f(x)$ når punktene $(1 + \ln x, \ln y)$ ligger på en rett linje gjennom punktet $(0,1)$ med stigningstall 2.

Svar: $e^3 x^2$.

Begrunnelse. Punkter (u, v) som ligger på en slik linje, tilfredsstiller ligningen

$$v = 2u + 1.$$

Spesielt betyr det at

$$\ln y = 2(1 + \ln x) + 1.$$

Altså er

$$y = e^{2(1+\ln x)+1} = e^2 \cdot e^{2\ln x} \cdot e^1 = e^2 \cdot \left(e^{\ln x}\right)^2 \cdot e = e^2 \cdot x^2 \cdot e = e^3 x^2.$$

Problem. Bestem $\lim_{x\to 0} \frac{5-\sqrt{25-x^2}}{x}$.

Svar: 0.

Begrunnelse.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{5-\sqrt{25-x^2}}{x} &= \lim_{x\to 0} \frac{(5-\sqrt{25-x^2})(5+\sqrt{25-x^2})}{x(5+\sqrt{25-x^2})} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{25-(25-x^2)}{x(5+\sqrt{25-x^2})} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x(5+\sqrt{25-x^2})} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{x}{5+\sqrt{25-x^2}} = \frac{0}{5+\sqrt{25}} = 0.
\end{aligned}$$

Problem. Finn grenseverdien for tallfølgen $\{a_n\}$ der $a_n = \frac{1-n^3}{1000n^2+2n^3}$.

Svar: $-\frac{1}{2}$.

Begrunnelse.

$$\frac{1-n^3}{1000n^2+2n^3} = \frac{\frac{1}{n^3}-1}{1000\frac{1}{n}+2} \to \frac{-1}{2}.$$

Problem. En rett sirkulær kjegle med høyde h og radius r har volum

$$V = \frac{\pi}{3} r^2 h.$$

La K være en slik kjegle med konstant høyde h meter der radien øker med en konstant fart på (1/2) meter i timen. Hvor raskt øker volumet til K idet radien til K er 3 meter?

Svar: πh m^3/t.

Begrunnelse.

$$V = \frac{\pi}{3} r^2 h$$

der h er konstant, mens r øker med fart $\frac{1}{2}$ m/time, det vil si $\frac{dr}{dt} = \frac{1}{2}$. Ved kjerneregelen er

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\pi h}{3} 2r \cdot \frac{dr}{dt} = \frac{\pi h}{3} \cdot 2 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} = \pi h \,\mathrm{m/time}.$$

Problem. Finn den deriverte til $y = f(x)$ i punktet $(1,2)$ når $y = f(x)$ er gitt implisitt ved ligningen $x^3y^3 + 4x^2y = 16$.

Svar: $-\frac{5}{2}$.

Begrunnelse. Vi deriverer ligningen implisitt med hensyn på x:

$$\begin{aligned}
(x^3)'y^3 + x^3(y^3)' + 4(x^2)'y + 4x^2y' &= (16)' \\
3x^2y^3 + x^3 \cdot 3y^2 \cdot \frac{dy}{dx} + 4 \cdot 2xy + 4x^2\frac{dy}{dx} &= 0.
\end{aligned}$$

Nå som vi er ferdige med å derivere, kan vi sette inn at $x = 1$ og $y = 2$:

$$\begin{aligned} 3 \cdot 1 \cdot 8 + 1 \cdot 3 \cdot 4 \cdot y' + 4 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 + 4 \cdot 1 \cdot y' &= 0 \\ 24 + 12y' + 16 + 4y' &= 0 \\ 16y' &= -40 \\ y' &= -\frac{5}{2}. \end{aligned}$$

Problem. Løs ulikheten $0 < |kx - 1| < 2$ der $k > 0$ er et gitt tall.

Svar: $-\frac{1}{k} < x < \frac{1}{k}$ og $\frac{1}{k} < x < \frac{3}{k}$.

Begrunnelse. Ulikheten $0 < |kx - 1|$ betyr rett og slett at x kan være hva som helst unntatt $x = 1/k$ som gir null for $|kx - 1|$. Ulikheten $|kx - 1| < 2$ betyr at

$$\begin{aligned} -2 < kx - 1 < 2 \\ -2 + 1 < kx < 2 + 1 \\ -\frac{1}{k} < x < \frac{3}{k}. \end{aligned}$$

Sammenholdt gir dette svaret.