

Notasjon og merknader

Som vanlig er enkelte oppgaver kopiert fra tidligere års løsningsforslag. Derfor kan notasjon, språk og stil variere noe fra oppgave til oppgave.

Oppgavene er hentet fra fagets lærebok, *Neuhauser: Calculus for Biology and Medicine*, tredje utgave.

Oppgaver fra kapittel 6.2

6.2.124 Vi skal, ved hjelp av L'Hopitals regel finne grensen

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_0^h e^x dx.$$

Vi observerer at

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_0^h e^x dx = 0,$$

slik at L'Hopitals regel faktisk er gyldig.

I tillegg vet vi at

$$\frac{d}{dh} \int_0^h e^x dx = e^h.$$

Dermed ender vi opp med

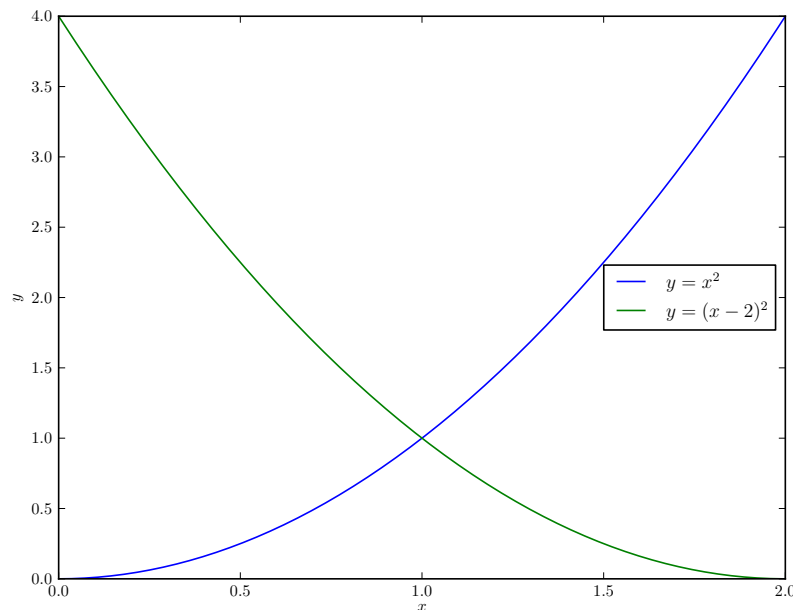
$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_0^h e^x dx \stackrel{\text{L'Hop}}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h}{1} = e^0 = 1.$$

6.3.13 Det kan være vanskelig å se for seg området vi skal finne arealet til i denne oppgaven. Hvis $f(x) = x^2$ og $g(x) = (x - 2)^2$, viser figur 1 området vi skal finne arealet til (området under de to kurvene mellom $x = 0$ og $x = 2$).

For å finne dette integralet skal vi integrere med hensyn på y . Fra figuren ser vi at integrasjons-grensene blir $y = 0$ og $y = 1$ (eventuelt kunne vi funnet $y = 1$ -grensen av integrasjonsområdet ved å løse likningen $x^2 = (x - 2)^2$). "Omskriving" gir da at

$$\begin{aligned} A &= \int_0^1 ((-\sqrt{y} + 2) - \sqrt{y}) dy \\ &= -2 \int_0^1 \sqrt{y} dy + 2 \int_0^1 dy \\ &= -2 \left(\frac{2}{3} 1^{3/2} - \frac{2}{3} 0^{3/2} \right) + 2(1 - 0) \\ &= \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Merk at vi måtte passe på å velge passende fortegn for inversfunksjonene.



Figur 1: Funksjonene i oppgave 6.3.13.

6.3.18

Den kumulative forandringen er integralet av forandringen, altså

$$\int_0^t \frac{d}{du} B(u) du = B(t) - B(0).$$

Det at vi kjenner $B(0) = B_0$ gjør at vi kan bestemme dette bestemte integralet.

Geometrisk sett betyr det at arealet mellom kurven og x -aksen tilsvarer endringen av verdi av funksjonen, med positivt bidrag dersom kurven ligger over aksene og negativt bidrag dersom kurven ligger under aksene.

Summen av den kumulative endringen og startverdien er verdien etter en gitt tid, så forskjellen i mengden av biomasse ved slutten av intervallet sammenliknet med starten er gitt ved

$$\begin{aligned} B(12) - B(0) &= \int_0^{12} \frac{d}{dt} B(t) dt \\ &= \int_0^{12} \cos\left(\frac{\pi}{6}t\right) dt \\ &= \frac{6}{\pi} [\sin(2\pi) - \sin(0)] = 0. \end{aligned}$$

Vi konkluderer med at $B(12) = B(0) = B_0$

Generelt sett er forskjellen i verdi mellom to tidspunkter differansen mellom de to kumulative forandringene for de to tidspunktene (fra starttidspunktet).

6.3.32

Vi skal finne gjennomsnittet v_{avg} av funksjonen gitt ved $v(t) = -(t-3)^2 + 5$ over intervallet $[0, 6]$. Gjennomsnittet er definert som integralet av funksjonen over det aktuelle området delt på lengden,

altså:

$$\begin{aligned}v_{\text{avg}} &= \frac{\int_0^6 v(t) dt}{\int_0^6 dt} = \frac{1}{6} \int_0^6 -(t-3)^2 + 5 dt \\&= \frac{1}{6} \left[-\frac{1}{3}(t-3)^3 + 5t \right]_0^6 \\&= \frac{1}{6} \left(\left(-\frac{1}{3}(6-3)^3 + 5 \cdot 6 \right) - \left(-\frac{1}{3}(0-3)^3 + 5 \cdot 0 \right) \right) \\&= \frac{1}{6} (-9 + 30 - 9) \\&= 2.\end{aligned}$$

Vi skal også finne en tid t^* slik at $v(t^*) = v_{\text{avg}} = 2$, det gjør vi som følger:

$$\begin{aligned}2 &= -(t-3)^2 + 5 \\ \Leftrightarrow (t-3)^2 &= 3 \\ \Leftrightarrow t^* &= 3 \pm \sqrt{3}.\end{aligned}$$

Merk at vi kunne forutsi at likningen over hadde to løsninger ved å observere at hastighetsfunksjonen v er en (opp-ned) parabel med topp-punkt $y = 5$, så siden 2 er strengt mindre enn 5 må den skjære linja $y = 2$ akkurat to ganger.