

Notasjon og merknader

Som vanlig er enkelte oppgaver kopiert fra tidligere års løsningsforslag. Derfor kan notasjon, språk og stil variere noe fra oppgave til oppgave.

Oppgavene er hentet fra fagets lærebok, *Neuhauser: Calculus for Biology and Medicine*, tredje utgave.

Oppgaver fra kapittel 6.3

6.3.49 Volumet av omdreiningslegemet er gitt ved $\int_0^{\ln 3} \pi(f(y))^2 dy$ (se Example 10) der $f(y) = e^y - 1$.

$$V = \pi \int_0^{\ln 3} (e^y - 1)^2 dy = \pi \cdot \left[\frac{e^{2y}}{2} - 2e^y + 1 \right]_0^{\ln 3} = \pi \cdot \ln 3.$$

6.3.64 Som i bokens resultat på side 319 har vi

$$L = \int_{-M}^M \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

Her er¹

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2a}(e^{ax} + e^{-ax}) \\ f'(x) &= \frac{1}{2a}(ae^{ax} - ae^{-ax}) = \frac{1}{2}(e^{ax} - e^{-ax}). \end{aligned}$$

Vi må altså se på uttrykket

$$\begin{aligned} \sqrt{1 + (f'(x))^2} &= \sqrt{1 + \frac{(e^{ax} - e^{-ax})^2}{4}} = \sqrt{1 + \frac{e^{2ax} - 2 + e^{-2ax}}{4}} \\ &= \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{4}(e^{2ax} + e^{-2ax})} \\ &= \sqrt{\frac{1}{4}(e^{2ax} + 2 + e^{-2ax})} \\ &= \sqrt{\left(\frac{e^{ax} + e^{-ax}}{2}\right)^2} \\ &= \frac{e^{ax} + e^{-ax}}{2}. \end{aligned}$$

Dermed får vi

$$L = \frac{1}{2} \int_{-M}^M (e^{ax} + e^{-ax}) dx.$$

¹Forøvrig kan det nevnes at funksjonen definert ved $(e^x + e^{-x})/2$ kalles en *hyperbolsk cosinus*, og gjerne skrives $\cosh x$. Likeledes har vi den *hyperbolske sinus*, $\sinh x = (e^x - e^{-x})/2$

Integrasjon er lineært, så

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2} \int_{-M}^M e^{ax} dx + \frac{1}{2} \int_{-M}^M e^{-ax} dx \\ &= \frac{1}{2a} (e^{aM} - e^{-aM}) + \frac{1}{-2a} (e^{-aM} - e^{aM}) \\ &= \frac{e^{aM} - e^{-aM}}{a}. \end{aligned}$$

Med $a = 1$ og $M = \ln 2$ som oppgitt får vi da

$$L = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

Oppgaver fra kapittel 7.4

7.4.3 Dette integralet er uekte (“improper”) fordi integrasjonsdomenet har uendelig utstrekning. La $b > 0$, og se på

$$\int_0^b \frac{2}{1+x^2} dx = 2 \int_0^b \frac{1}{1+x^2} dx.$$

Dette er et (ekte, “proper”) integral vi vet hvordan beregne: Den antideriverte til $1/(1+x^2)$ er, per tabell 6-1 på side 300 i boken, $\arctan x$ pluss en konstant.² Dermed er

$$2 \int_0^b \frac{1}{1+x^2} dx = 2(\arctan b - \arctan 0) = 2 \arctan b.$$

Det uekte integralet vi søker er

$$\int_0^\infty \frac{2}{1+x^2} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} 2 \arctan b.$$

Konvergerer dette? I så fall, hva mot?

Vel, la oss minne oss selv på hva $\arctan b$ uttrykker. Først av alt husker vi at i en rettvinklet trekant med vinkel x og hypotenus av lengde 1, så er $\tan x = \sin x / \cos x$ forholdet mellom motstående katet og hosliggende katet. Gitt et slik forholdstall b , uttrykker $\arctan b$ vinkelen. Så det vi spør om er: Når forholdet b mellom motstående og hosliggende katet i en slik rettvinklet trekant går mot uendelig, hva skjer med vinkelen i trekanten? Vi lurte altså på hva som skjer med x når

$$\frac{\sin x}{\cos x} \rightarrow \infty.$$

Overbevis deg selv om at dette betyr at $x \rightarrow \pi/2$. Følgelig konvergerer grenseverdien vi er interessert i mot $\pi/2$, så

$$\int_0^\infty \frac{2}{1+x^2} dx = 2 \lim_{b \rightarrow \infty} \arctan b = 2 \frac{\pi}{2} = \pi.$$

7.4.8 Dette integralet er uekte (“improper”) fordi integrasjonsdomenet har uendelig utstrekning. La $b > 0$, og definér

$$\begin{aligned} I_b &= \int_0^b x e^{-x^2/2} dx \\ J_b &= \int_{-b}^0 x e^{-x^2/2} dx. \end{aligned}$$

²Husk at noen, for eksempel boken, skriver $\arctan$ som $\tan^{-1}$. Ikke la dette forvirre, det er bare to navn på samme funksjon!

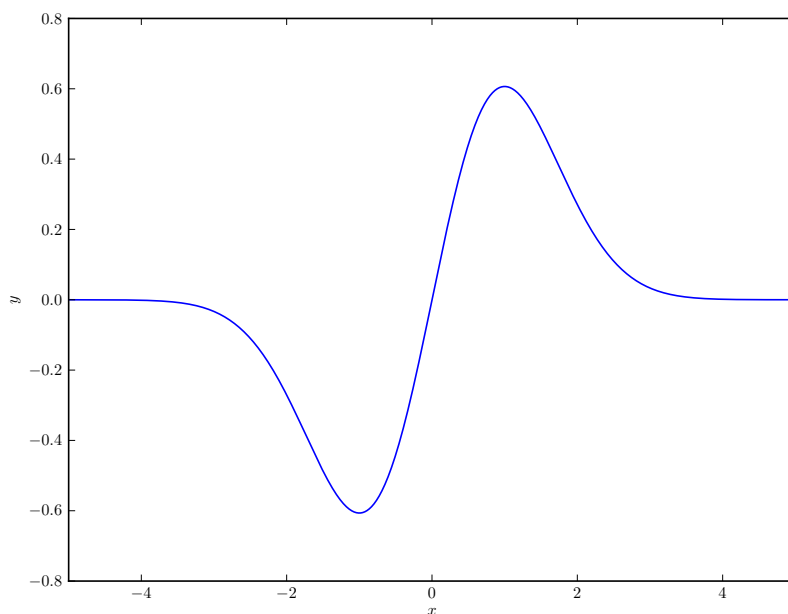
Ved hjelp av substitusjonen $x \mapsto -x$ ser vi at

$$J_b = - \int_0^b x e^{-x^2/2} dx = -I_b.$$

Integralet vi er ute etter er

$$\lim_{b \rightarrow \infty} I_b + \lim_{b \rightarrow \infty} J_b = \lim_{b \rightarrow \infty} I_b - \lim_{b \rightarrow \infty} I_b = 0.$$

En kan også oppdage dette ved simpelthen å inspisere integranden i integralet vi er bedt om å beregne: Funksjonen er *antisymmetrisk* om 0. Tenker vi på verdien av integralet som arealet under grafen til integranden, forstår vi at ethvert bidrag på positiv side av origo nøyaktig kanselleres av et korresponderende bidrag på negativ side med motsatt fortegn. Integralet må derfor bli 0, slik den mer detaljerte analysen over tilsier. Dette er da forutsatt at integralet konvergerer (se Example 5). Figur 1 viser grafen til funksjonen.



Figur 1: Figur tilhørende oppgave 7.4.8.