

Notasjon og merknader

Som vanlig er enkelte oppgaver kopiert fra tidligere års løsningsforslag. Derfor kan notasjon, språk og stil variere noe fra oppgave til oppgave.

Oppgavene er hentet fra fagets lærebok, *Neuhauser: Calculus for Biology and Medicine*, tredje utgave.

Oppgaver fra kapittel 2.2

2.2.59 Følgen konvergerer mot 0: $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, for eksempel fordi $\{|a_n|\} = \{1/n\}$ gjør det. Gitt en $\varepsilon > 0$ ønsker vi å finne en $N \in \mathbb{N}$ slik at dersom $n > N$ har vi

$$|(-1)^n/n - 0| < \varepsilon.$$

For å gjøre dette bearbeider vi venstresiden av ulikheten over: $|(-1)^n/n| = |1/n|$ siden absoluttverdien av $(-1)^n$ er 1. Siden n må være større enn 0, er $|1/n| = 1/n$.

Vi får da $1/n < \varepsilon$, som er ekvivalent med $1/\varepsilon < n$, så n må være større enn $1/\varepsilon$.

I denne oppgaven blir det $n > 1/0.01 = 100$, altså må n være større enn 100 for at $|(-1)^n/n - 0| < 0.01$. Dermed er én mulig $N = 100$.

2.2.104 Et fikspunkt a av $\{a_n\}$ er karakterisert ved at $a_{n+1} = a_n$, eller med andre ord ved

$$a = \frac{1}{3}\left(a + \frac{1}{9}\right).$$

Løser vi denne likningen for a får vi $a = \frac{1}{18}$.

Siden vi antar at grensen eksisterer, kan vi konkludere med at $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a = \frac{1}{18}$.

2.2.107 Et fikspunkt a av $\{a_n\}$ er karakterisert ved at $a_{n+1} = a_n$, eller med andre ord ved

$$\begin{aligned} a &= 2a(1 - a) = 2a - 2a^2 \\ \Rightarrow 2a^2 - a &= a(2a - 1) = 0. \end{aligned}$$

Løser vi denne likningen for a får vi $a = \frac{1}{2}$ eller $a = 0$.

For å finne ut hvilket av disse fikspunktene som er grensen til følgen (med $a_0 = 0.1$ som initialverdi) kan vi enten skrive opp de første leddene eller argumentere ut fra $a_{n+1} = 2a_n(1 - a_n)$, førstnevnte gjøres enkelt på kalkulator, så vi gjør det sistnevnte.

Siden $a_0 = 0.1$, er $1 - a_0$ omtrent 1, så $a_1 = 2 \cdot a_0 \cdot (1 - a_0)$ er større enn a_0 , det samme vil være sant for a_{k+1} helt til $2 \cdot (1 - a_k)$ er mindre enn 1, følgen er altså stigende for den gitte initialverdi. Vi kan dermed konkludere med at $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{2}$.

Oppgaver fra kapittel 2.3

2.3.21 Vi ønsker å finne R og K slik at vi kan skrive om

$$N_{t+1} = \frac{5N_t}{1 + N_t/20}$$

på formen

$$N_{t+1} = \frac{RN_t}{1 + \frac{R-1}{K}N_t}.$$

Ved å sammenlikne de to uttrykkene observerer vi at R må være lik 5.

Dersom gjenstår å finne K , det gjør vi som følger:

$$\frac{1}{20} = \frac{R-1}{K} = \frac{5-1}{K} = \frac{4}{K}.$$

Dette er ekvivalent med $K = 4 \cdot 20 = 80$.