

Notasjon og merknader

Som vanlig er enkelte oppgaver kopiert fra tidligere års løsningsforslag. Derfor kan notasjon, språk og stil variere noe fra oppgave til oppgave.

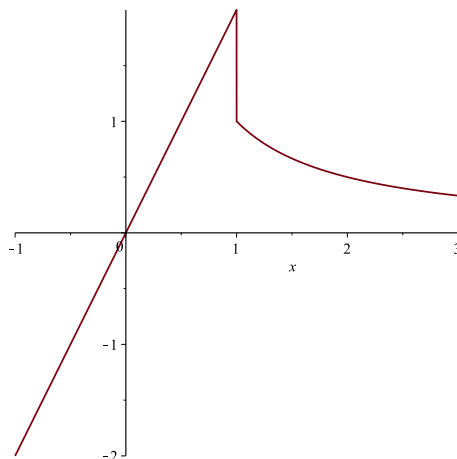
Oppgavene er hentet fra fagets lærebok, *Neuhauser: Calculus for Biology and Medicine*, tredje utgave.

Oppgaver fra kapittel 3.2

3.2.26 La funksjonen f være gitt som følger:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{if } x \geq 1, \\ 2x + c & \text{if } x < 1. \end{cases}$$

Under er funksjonen plottet for valget $c = 0$:



Figur 1: $f(x)$ for $c = 0$

At funksjonen er kontinuert er ekvivalent med å undersøke om grensen til funksjonen er lik fra begge sider i alle punkter, altså om:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x),$$

for alle $a \in \mathbb{R}$.

Siden $2x + c$ er kontinuert for alle x og $1/x$ er kontinuert for alle $x \geq 1$, er det tilstrekkelig å sjekke om funksjonen f er kontinuert i $x = 1$ for forskjellige valg av c .

For $c = 0$ har vi $2x + c = 2x$, og $2 \cdot 1 = 2$. På den annen side har vi at $1/x = 1$ for $x = 1$, så siden $2 \neq 1$, er ikke f kontinuert for $c = 0$.

For å finne en c som gjør f kontinuert holder det å løse likningen

$$1/a = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = 2a + c$$

når $a = 1$, altså $1 = 2 + c$, så vi får at vi må ha $c = -1$.

3.2.48 Vi ønsker å finne grensen:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} \ln(e^x \cos(x-1)) &= \lim_{x \rightarrow 1} (\ln(e^x) + \ln \cos(x-1)) \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} x + \lim_{x \rightarrow 1} \ln \cos(x-1) \\ &= 1 + \lim_{x \rightarrow 1} \ln \cos(x-1)\end{aligned}$$

Nå vet vi imidlertid at $\lim_{x \rightarrow 1} \cos(x-1) = 1$ og $\ln(1) = 0$, samt at $\ln$ er kontinuerlig rundt $x = 1$, så vi får at grensen blir som følger

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} \ln(e^x \cos(x-1)) &= 1 + \lim_{x \rightarrow 1} \ln \cos(x-1) \\ &= 1 + \ln\left(\lim_{x \rightarrow 1} \cos(x-1)\right) \\ &= 1 + \ln(1) = 1.\end{aligned}$$

Oppgaver fra kapittel 3.3

3.3.18 Vi ønsker å beregne:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-\ln x}.$$

Vi kan skrive om som følger:

$$e^{-\ln x} = e^{\ln x^{-1}} = x^{-1} = \frac{1}{x},$$

og så ta grensen, som vi kjenner fra tidligere:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-\ln x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Oppgaver fra kapittel 3.4

3.4.7 Vi ønsker å finne følgende trigonometriske grenseverdi:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(5x)}{x}.$$

Denne likninger på en annen funksjon hvor vi allerede kjenner grenseverdien:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 0.$$

Så vi vil omskrive førstenevnte til å ha denne formen:

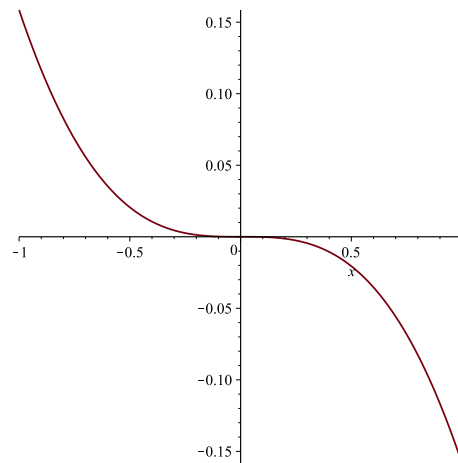
$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(5x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} 5 \frac{\sin(5x)}{5x} \\ &= 5 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(5x)}{5x} \\ &= 5 \lim_{5x \rightarrow 0} \frac{\sin(5x)}{5x} \\ &= 5 \cdot 1 = 5.\end{aligned}$$

Oppgaver fra kapittel 3.5

3.5.4 Vi plotter $f(x) = \sin(x) - x$ for $x \in [-1, 1]$:

Fra grafen ser vi at $\sin(-1) < 1$, så $f(-1) = \sin(-1) - (-1) > 0$ og $\sin(1) < 1$, så $f(1) = \sin(1) - 1 < 0$. Siden $f(x) = \sin(x) - x$ er kontinuerlig, følger det fra skjæringssetningen (Intermediate-value theorem) at den har (minst) et nullpunkt mellom for x mellom -1 og 1 .

3.5.5 Det er klart at $f(x) = e^{-x} - x$ er en kontinuerlig funksjon. Ettersom $f(0) = 1$ og $f(1) = e^{-1} - 1 < 1 - 1 = 0$ følger det fra skjæringssetningen (IVT) at det eksisterer en $c \in (0, 1)$ slik at $f(c) = 0$.



Figur 2: $f(x) = \sin(x) - x$