

Notasjon og merknader

Oppgavene er hentet fra fagets lærebok, *Neuhauser: Calculus for Biology and Medicine*, tredje utgave.

Oppgaver fra kapittel 4.1

4.1.23 Vi ønsker å finne den deriverte av funksjonen gitt ved $f(x) = 1 - x^3$ ved å bruke den formelle definisjonen av den deriverte.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 + (x+h)^3 - (1 + x^3)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x^3}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(3x^2 + 3xh + h^2)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} 3x^2 + 3xh + h^2 \\ &= 3x^2, \end{aligned}$$

som er det vi forventet.

Innsatt $x = 2$ gir dette $f'(2) = 3 \cdot 2^2 = 12$.

Merk: Vi kunne eventuelt ha byttet ut x med 2 i hele utregningen over.

4.1.24 a)

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 2} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2+h} - \frac{1}{2}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1}{2(2+h)} \\ &= \frac{-1}{4} \end{aligned}$$

b) Stigningstallet til tangentlinjen er $-\frac{1}{4}$ og normallinjen står vinkelrett på denne. Husk at for linjer som står vinkelrett på hverandre så er produktet av stigningstallene lik -1 . Den normale linjen har dermed stigningstall 4 med tilhørende likning $(y - 2) = 2(x - \frac{1}{2})$.

Oppgaver fra kapittel 4.2

4.2.44 Vi skal finne tangentlinja $y = ax + b$ til funksjonen gitt ved

$$y = f(x) = -2x^3 - 3x + 1$$

i punktet $(1, f(1))$

Vi finner først stigningstallet, ved å derivere funksjonen for så å evaluere den deriverte i $x = 1$:

$$f'(x) = -2 \cdot 3x^{3-1} - 3 = -6x^2 - 3,$$

så

$$a = f'(1) = -6 \cdot 1 - 3 = -9.$$

Det gjenstår å finne b , det gjør vi ved å sette inn $(1, f(1))$ i $y = -9x + b$. Vi ser at $f(1) = -2 \cdot 1^3 - 3 \cdot 1 + 1 = -2 - 3 + 1 = -4$.

Så vi finner:

$$b = f(1) + 9 \cdot 1 = -4 + 9 = 5.$$

Tangentlinja til funksjonen blir dermed:

$$y = -9x + 5,$$

eller, på *standardform*:

$$y + 9x - 5 = 0.$$

Oppgaver fra kapittel 4.3

4.3.53 Vi bruker for eksempel brøkregelen (s. 154), og finner

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(-3x^2)(1-x) - (3-x^3)(-1)}{(1-x)^2} = \frac{-3x^2 + 3x^3 + 3 - x^3}{(1-x)^2} \\ &= \frac{2x^3 - 3x^2 + 3}{(1-x)^2} \end{aligned}$$

4.3.61 Vi går frem sakte: La oss skrive $g(x) = \sqrt{3x} = \sqrt{3}\sqrt{x}$ og $h(x) = x^2 - 1$. Da er

$$g'(x) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{x}}$$

og

$$h'(x) = 2x.$$

Siden $f(x) = g(x)h(x)$ gir produktregelen

$$f'(x) = g'(x)h(x) + g(x)h'(x) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{x}}(x^2 - 1) + 2\sqrt{3}x^{3/2}.$$

Oppgaver fra kapittel 4.4

4.4.17 Her benytter vi kjerneregelen med $u = g(t) = \frac{t}{t-3}$ og $f(u) = u^3$. Dette gir

$$\begin{aligned} (f \circ g)'(t) &= f'[g(t)] \cdot g'(t) \\ &= 3(g(t))^2 \cdot \left(\frac{1}{t-3} - \frac{t}{(t-3)^2} \right) \\ &= 3 \frac{t^2}{(t-3)^2} \cdot \frac{-3}{(t-3)^2} \\ &= \frac{-9t^2}{(t-3)^4} \end{aligned}$$

4.4.35 a) Vi ønsker å finne den deriverte

$$f'(x^2 + 3)$$

gitt at $f'(x) = \frac{1}{x}$.

For å gjøre dette bruker vi kjerneregelen $(f(g(x)))' = g'(x) \cdot f'(g(x))$:

$$f'(x^2 + 3) = (x^2 + 3)' \cdot f'(x^2 + 3) = \frac{2x}{x^2 + 3}.$$

b) Tilsvarende finner vi

$$\begin{aligned} f'(\sqrt{x-1}) &= (\sqrt{x-1})' \cdot f'(\sqrt{x-1}) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x-1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x-1}} \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{x-1}. \end{aligned}$$