

Notasjon og merknader

Som vanlig er enkelte oppgaver kopiert fra tidligere års løsningsforslag. Derfor kan notasjon, språk og stil variere noe fra oppgave til oppgave.

Oppgavene er hentet fra fagets lærebok, *Neuhauser: Calculus for Biology and Medicine*, tredje utgave.

Oppgaver fra kapittel 4.4

4.4.57 Vi har en kurve gitt ved

$$\frac{x^2}{5^2} - \frac{y^2}{3^2} = 1$$

og et gitt punkt $(25/3, 4)$.

For å finne tangentlinjen $y = ax + b$ til kurven gjennom punktet bestemmer vi først stigningstallet

$a = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{(25/3, 4)}$, ved hjelp av implisitt derivasjon av uttrykket for kurven:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(\frac{x^2}{5^2} - \frac{y^2}{3^2} \right) &= 0 \\ \frac{2x}{5^2} - \frac{2yy'}{3^2} &= 0 \end{aligned}$$

Vi løser denne likningen for y' og får:

$$y' = \frac{9x}{25y}.$$

som innsatt $x = 25/3$ og $y = 4$ gir

$$a = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{(25/3, 4)} = \frac{9 \cdot \frac{25}{3}}{25 \cdot 4} = \frac{9}{100} \cdot \frac{25}{3} = \frac{3}{4}.$$

For å finne b setter vi inn de samme verdiene for x og y i $y = ax + b$ og får:

$$4 = \frac{3}{4} \cdot \frac{25}{3} + b = \frac{25}{4} + b,$$

som gir

$$b = 4 - \frac{25}{4} = \frac{16 - 25}{4} = -\frac{9}{4}.$$

Vi konkluderer med at linja

$$y = \frac{3}{4}x - \frac{9}{4} = \frac{3}{4}(x - 3)$$

tangerer kurven vår i det gitte punktet.

For å finne linja som står normalt på kurven vår, ekvivalent: på tangentlinja vi nettopp fant, i det oppgitte punktet, kan vi bruke at vi vet at dennes stigningstall er $a' = -\frac{1}{a} = -\frac{4}{3}$ og setter på samme måte inn i $y = a'x + b'$ for å finne b' :

$$b' = 4 - \left(-\frac{4}{3}\right) \cdot \frac{25}{3} = 4 + \frac{100}{9} = \frac{36 + 100}{9} = \frac{136}{9}.$$

Altså står linja

$$y = -\frac{4}{3}x + \frac{136}{9}$$

normalt på $\frac{x^2}{5^2} - \frac{y^2}{3^2} = 1$ i punktet $(25/3, 4)$.

4.4.69 Vi har relasjonen $V = \pi r^2 h$ mellom volumet vann i tanken og høyden til vannet, hvor både V og h er funksjoner av tiden t , og $r = 5\text{m}$. Vi vet i tillegg hva endringen i volumet er (oppgitt i oppgaven til $\frac{dV}{dt} = 250\text{L/min} = 250\text{dm}^3/\text{min} = \frac{25}{100}\text{m}^3/\text{min}$. Det vi ønsker å finne er endringen til høyden, altså $\frac{dh}{dt}$.

Vi gjør dette som følger:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{d(\pi r^2 h)}{dt} = \pi r^2 \frac{dh}{dt},$$

siden r (og π) er en konstant. Denne kan vi omgjøre og sette inn tallene i oppgaven i for å få:

$$\frac{dh}{dt} = \frac{1}{\pi r^2} \frac{dV}{dt} = \frac{1}{\pi \cdot (5\text{m})^2} \cdot \frac{25}{100} \frac{\text{m}^3}{\text{min}} = \frac{1}{100\pi} \frac{\text{m}}{\text{min}}.$$

Oppgaver fra kapittel 4.7

4.7.5 Vi har funksjonen f gitt ved $f(x) = 3 - 2x^3$ for alle $x \geq 0$, og ønsker å finne dennes inversfunksjon, og derivere den på to forskjellige måter.

Først finner vi den inversen funksjonen:

$$\begin{aligned} y &= 3 - 2x^3 \\ \Leftrightarrow 2x^3 &= 3 - y \\ \Leftrightarrow x &= \left(\frac{3-y}{2}\right)^{1/3} \\ \Rightarrow f^{-1}(y) &= \left(\frac{3-y}{2}\right)^{1/3} \end{aligned}$$

Deretter ønsker vi å derivere denne:

Metode (i): Derivere direkte med hensyn på y :

$$\begin{aligned} f^{-1'}(y) &= \left(\left(\frac{3-y}{2}\right)^{1/3}\right)' = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \left(\frac{3-y}{2}\right)^{1/3-1} \\ &= -\frac{1}{6} \left(\frac{3-y}{2}\right)^{-2/3}. \end{aligned}$$

Metode (ii): Bruke formelen

$$\frac{d}{dx} f^{-1}(x) = \frac{1}{f'[f^{-1}(x)]}$$

For å bruke denne må vi altså først finne f' :

$$f'(x) = (3 - 2x^3)' = -6x^2.$$

For så å sette inn $f^{-1}(x)$ i denne:

$$\frac{d}{dx} f^{-1}(x) = \frac{1}{f'[f^{-1}(x)]} = \frac{1}{-6 \left(\left(\frac{3-y}{2}\right)^{1/3}\right)^2} = -\frac{1}{6} \left(\frac{3-y}{2}\right)^{-2/3},$$

som er det samme svaret som for Metode (i).

4.7.35 Vi skal finne den deriverte av funksjon f , gitt ved $f(x) = \ln \sqrt{x^2 + 1}$. Å observere

$$\ln \sqrt{x^2 + 1} = \ln(x^2 + 1)^{1/2} = \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1)$$

forenkler oppgaven noe.

For å derivere funksjon trenger vi nå kun å bruke kjerneregelen én gang:

$$\left(\frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) \right)' = \frac{1}{2} \frac{(x^2 + 1)'}{x^2 + 1} = \frac{x}{x^2 + 1}.$$

4.7.73 I denne oppgaven søker vi å finne den førstederiverte, y' , til funksjonen gitt ved $y = x^{\cos x}$ ved å bruke logaritmisk derivasjon. Det vil si ved først å ta logaritmen på begge sider av uttrykket, for så å derivere begge sider med hensyn på x .

Først:

$$\ln y = \ln x^{\cos x} = \cos x \ln x.$$

Den deriverte av venstresiden finne vi som følger:

$$(\ln y)' = \frac{y'}{y}.$$

For å derivere høyresiden trenger vi produktregelen:

$$(\cos x \ln x)' = (\cos x)' \ln x + \cos x (\ln x)' = -\sin x \ln x + \frac{\cos x}{x}.$$

Til slutt finner vi y' ved å sette y'/y lik $(\cos x \ln x)'$ og multiplisere med y :

$$y' = y \cdot (\cos x \ln x)' = x^{\cos x} \cdot \left(-\sin x \ln x + \frac{\cos x}{x} \right).$$