

Notasjon og merknader

Som vanlig er enkelte oppgaver kopiert fra tidligere års løsningsforslag. Derfor kan notasjon, språk og stil variere noe fra oppgave til oppgave.

Oppgavene er hentet fra fagets lærebok, *Neuhauser: Calculus for Biology and Medicine*, tredje utgave.

Oppgaver fra kapittel 5.2

5.2.29 Vi har følgende funksjon for endringen av en populasjon:

$$f(N) = N \left(1 - \left(\frac{N}{K} \right)^\theta \right),$$

hvor $\theta > 1$ og $K > 0$, og ønsker å finne ut for hvilke verdier av N denne er økende og minkende. For å gjøre dette studerer vi fortegnet til den deriverte:

$$\begin{aligned} f'(N) &= \left(N \left(1 - \left(\frac{N}{K} \right)^\theta \right) \right)' \\ &= \left(1 - \left(\frac{N}{K} \right)^\theta \right) + N \left(-\frac{\theta}{K} \left(\frac{N}{K} \right)^{\theta-1} \right) \\ &= 1 - (1 + \theta) \left(\frac{N}{K} \right)^\theta \end{aligned}$$

For å avgjøre hvor funksjonen synker og stiger må vi se på fortegnet til den deriverte for forskjellige N . Vi undersøker først hvor funksjonen er synkende:

$$\begin{aligned} 0 < f'(N) &= 1 - (1 + \theta) \left(\frac{N}{K} \right)^\theta \\ \frac{1}{1 + \theta} &> \left(\frac{N}{K} \right)^\theta \\ (1 + \theta)^{-\theta} &> \frac{N}{K} \\ K(1 + \theta)^{-\theta} &> N \end{aligned}$$

Altså er funksjonen synkende når $N < K(1 + \theta)^{-\theta}$.

Tilsvarende er funksjonen stigende når $N > K(1 + \theta)^{-\theta}$.

Oppgaver fra kapittel 5.3

5.3.35 Vi er gitt funksjonen definert ved, for $x \neq 0$,

$$f(x) = \frac{x}{x-1}.$$

a) For å finne de ønskede grensene skriver vi først om funksjonen som følger

$$f(x) = \frac{x}{x-1} = \frac{(x-1) + 1}{x-1} = 1 + \frac{1}{x-1}.$$

Så finner vi grensene:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x-1} \right) = 1 + \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x-1} = 1 + 0 = 1.$$

Helt tilsvarende for den andre grensen:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x-1} \right) = 1 + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x-1} = 1 + 0 = 1.$$

Dette viser at linja $y = 1$ er en horisontal asymptote til funksjonen.

b) Vi fortsetter å bruke omskrivinga av funksjonen

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(1 + \frac{1}{x-1} \right) = -\infty.$$

Denne siste likheten kan vi, for eksempel, begrunne ved å substituere $u = x - 1$, slik at grensen tas av $1/u$ for $u \rightarrow 0^-$, denne kjenner vi til fra før.

Samme argument gir

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \infty.$$

Dette viser at linja $x = 1$ er en vertikal asymptote for f .

c) For å finne ut hvor f er økende og minkende studerer vi dens deriverte:

$$f'(x) = \left(1 + \frac{1}{x-1} \right)' = (-1) \frac{1}{(x-1)^2}.$$

Denne er alltid negativ, så funksjonen er synkende overalt (hvor den er definert).

d) Vi finner den andrederiverte ved å derivere den førstederiverte:

$$f''(x) = \left((-1) \frac{1}{(x-1)^2} \right)' = \frac{2}{(x-1)^3}.$$

Denne er positiv for $x > 1$, negativ for $x < 1$ og aldri null. Dette vil si at funksjonen er konkav opp for $x > 1$ og konkav ned for $x < 1$, samt at den ikke har noen vendepunkter ("inflection points").

Oppgaver fra kapittel 5.5

5.5.45 Vi skal regne ut følgende grense, som vi kaller L for å lette notasjonen, ved hjelp av L'Hôpitals regel:

$$L = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{x} \right)^x.$$

Vi ser at uttrykket vi skal ta grensen av alltid er positivt, så vi kan ta logaritmen :

$$\ln L = \ln \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{x} \right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \ln \left(1 + \frac{3}{x} \right)^x.$$

Vi skriver om det siste uttrykket for å få noe på formen “0/0”:

$$\begin{aligned}\ln L &= \lim_{x \rightarrow \infty} \ln \left(1 + \frac{3}{x} \right)^x \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} x \ln \left(1 + \frac{3}{x} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln \left(1 + \frac{3}{x} \right)}{\frac{1}{x}} \\ &\stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-\frac{3}{x^2}}{-\frac{1}{x^2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3}{1 + \frac{3}{x}} = \frac{3}{1 + 0} = 3.\end{aligned}$$

I utregningen brukte vi følgende deriverte:

$$\left(\ln \left(1 + \frac{3}{x} \right) \right)' = \frac{\left(1 + \frac{3}{x} \right)'}{1 + \frac{3}{x}} = -\frac{\frac{3}{x^2}}{1 + \frac{3}{x}}$$

og

$$\left(\frac{1}{x} \right)' = -\frac{1}{x^2}.$$

Siden $\ln L = 3$, er $L = e^3$.

Ekstra: L'Hôpitals regel

5.5.25 I denne oppgaven skal vi regne ut grensen

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x e^{-x}.$$

Den er ikke umiddelbart et “ ∞/∞ ”-uttrykk. Dersom vi observerer at $e^{-x} = 1/e^x$, samt at både x og e^x går mot uendelig når x gjør det, har vi imidlertid et slikt uttrykk. Dermed kan vi bruke L'Hôpitals regel som vist under:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} x e^{-x} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^x} \\ &\stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{e^x} \\ &= 0.\end{aligned}$$

5.5.39 Grensen vi skal beregne

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right),$$

krever noe mer omskriving før vi kan anvende L'Hôpitals regel. Vi setter først uttrykket på felles brøkstrek:

$$\left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right) = \frac{x - \sin x}{x \sin x}.$$

Dette gir et “0/0”-uttrykk, som vi så kan bruke L'Hôpitals regel for å beregne grensen av:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - \sin x}{x \sin x} \\ &\stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(x - \sin x)'}{(x \sin x)'} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos x}{\sin x + x \cos x}.\end{aligned}$$

Vi vet at $\lim_{x \rightarrow 0^+} 1 - \cos x = 0$ og ser også at $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sin x + x \cos x = 0$, så vi har altså igjen endt opp med et “0/0”-uttrykk. Det betyr at vi igjen kan bruke L'Hôpitals regel:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos x}{\sin x + x \cos x} &\stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(1 - \cos x)'}{(\sin x + x \cos x)'} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{\cos x + (\cos x - x \sin x)}. \end{aligned}$$

Vi regner ut grensen av nevneren først:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} 2 \cos x - x \sin x = \lim_{x \rightarrow 0^+} 2 \cos x + 0 = 2.$$

Siden telleren går mot null og nevneren ikke gjør det, har vi følgende:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{2 \cos x - x \sin x} = 0.$$

Fra dette konkluderer vi med at

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right) = 0.$$

5.5.51 Vi skal regne ut

$$\lim_{x \rightarrow 0} x e^x.$$

Oppgaveteksten sier at vi skal vurdere om L'Hôpitals regel gjelder for denne grensen, og med god grunn. Dette er et “0 · 1”-uttrykk, så vi trenger ikke å bruke regelen i det hele tatt. Vi kan konkludere direkte med at grensen er 0:

$$\lim_{x \rightarrow 0} x e^x = 0.$$