Determinanter av matriser større enn 2×2

En kvadratisk matrise A er inverterbar hvis determinanten til A er forskjellig fra null, dvs. $\det A \neq 0$, og A er singulær (ikke inverterbar) hvis $\det A = 0$.

Likningssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har entydig løsning hvis $\det A \neq 0$ og ingen eller uendelig mange løsninger hvis $\det A = 0$.

Spesielt har likningssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ bare den trivielle løsningen (alle ukjente er lik null) hvis $\det A \neq 0$ og uendelig mange løsninger hvis $\det A = 0$. (Likningssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ har helt sikkert minst én løsning, nemlig den trivielle.)

2×2-matriser. Som det står i læreboka, er determinanten av en 2×2-matrise $A = \left[\begin{smallmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{smallmatrix}\right]$

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Eksempel.

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-2) - 3 \cdot 2 = -8.$$

Større matriser. Vi kan regne ut determinanten av større matriser ved å

- starte med produktet av 1. element i øverste rad og determinanten av matrisen som framkommer ved å stryke raden og søylen som elementet tilhører,
- så *subtrahere* produktet av 2. element i øverste rad og determinanten av matrisen som framkommer ved å stryke raden og søylen som elementet tilhører,
- så *addere* produktet av 3. element i øverste rad og determinanten av matrisen som framkommer ved å stryke raden og søylen som elementet tilhører,
- og så videre for alle elementene i øverste rad, med subtraksjon og addisjon annenhver gang.

Eksempel.

$$\begin{vmatrix} 4 & 5 & 8 \\ 7 & 1 & 3 \\ 6 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 6 & -2 \end{vmatrix} + 8\begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 6 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 4 \cdot (-8) - 5 \cdot (-32) + 8 \cdot 8 = 192.$$

Regler. Regnearbeidet ville ha vært enklere om vi hadde hatt noen nuller i øverste rad. Vi har noen regneregler for determinanter som kan hjelpe oss å oppnå dette:

1. Determinanten av en matrise er lik determinanten av den transponerte matrisen.
2. Determinanten av en matrise skifter fortegn hvis to rader eller to søyler bytter plass.
3. Determinanten av en matrise blir k ganger større hvis en rad eller en søyle multipliseres med k.
4. Determinanten av en matrise er uforandret hvis et multiplum av en rad legges til en annen rad eller et multiplum av en søyle legges til en annen søyle.

Eksempel.

$$
\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 4 & 5 & 8 \\ 7 & 1 & 3 \\ 6 & 2 & -2 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} -31 & 0 & -7 \\ 7 & 1 & 3 \\ -8 & 0 & -8 \end{vmatrix} && \text{\textit{Regel 4:} -5 ganger rad 2 lagt til rad 1, og -2 ganger rad 2 lagt til rad 3} \\
&= -\begin{vmatrix} 0 & -31 & -7 \\ 1 & 7 & 3 \\ 0 & -8 & -8 \end{vmatrix} && \text{\textit{Regel 2:} søyle 1 og 2 byttet plass} \\
&= -\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -31 & 7 & -8 \\ -7 & 3 & -8 \end{vmatrix} && \text{\textit{Regel 1}} \\
&= \begin{vmatrix} -31 & -8 \\ -7 & -8 \end{vmatrix} && \text{3×3-determinanten regnet ut} \\
&= 8\begin{vmatrix} 31 & 1 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} && \text{\textit{Regel 3:} søyle 2 multiplisert med $-1/8$ (satt -8 utenfor), og søyle 1 multiplisert med -1 (satt -1 utenfor)} \\
&= 8\cdot 24 = 192. && \text{2×2-determinanten regnet ut}
\end{aligned}
$$

Vi kunne ha spart oss bruken av regel 2 og regel 1 i eksemplet over hvis vi hadde *utviklet determinanten* etter søyle 2 etter at vi hadde brukt regel 4 i det første trinnet. Da bruker vi søyle 2 istedenfor rad 1 i framgangsmåten beskrevet på forrige side.

Men da måtte vi ha passet på å ha startet summen med negativt fortegn, så addere neste ledd, og så subtahere det siste leddet. Dette fordi bruken av reglene 2 og 1 førte til fortegnsskifte utenfor determinanten.

En kan finne ut hvilket fortegn en skal starte med ved å starte med null i elementet øverst til venstre og så telle seg vannrett eller loddrett til hhv. søylen eller raden en ønsker å utvikle determinanten etter. Hvis tallet er jamt, er fortegnet positivt, og hvis det er odde, er fortegnet negativt.