Lineære førsteordens differensiallikninger

Vi skal løse differensiallikningen

$$x\frac{dy}{dx} - y = x,$$

der $x > 0$. Den kan skrives om til

$$\frac{dy}{dx} + \left(-\frac{1}{x}\right)y = 1,$$

og er et eksempel på en *lineær førsteordens differensiallikning*, som kan skrives på form

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x).$$

Her er $P(x) = -\frac{1}{x}$ og $Q(x) = 1$.

For å løse en lineær førsteordens differensiallikning, skal vi multiplisere hele likningen med en *integrerende faktor*. Idéen er at vi skal kunne skrive venstre side som den deriverte av produktet av den integrerende faktoren og y, slik at vi kan løse differensiallikningen ved å antiderivere begge sidene.

La $A(x)$ være en antiderivert av $P(x)$. Det viser seg at $e^{A(x)}$ fungerer som integrerende faktor. Multipliserer vi likningen med denne, får vi

$$e^{A(x)}\frac{dy}{dx} + e^{A(x)}P(x)y = e^{A(x)}Q(x).$$

Og nå følger det fra multiplikasjonsregelen for derivering og kjerneregelen at venstre side er lik $\frac{d}{dx}(e^{A(x)}y)$ (vis det!). Differensiallikningen får form

$$\frac{d}{dx}(e^{A(x)}y) = e^{A(x)}Q(x),$$

og den kan løses ved å antiderivere begge sidene.

I vårt eksempel,

$$\frac{dy}{dx} + \left(-\frac{1}{x}\right)y = 1,$$

har vi

$$\int P(x)\,dx = \int \left(-\frac{1}{x}\right)dx = C - \ln x,$$

og vi velger $A(x) = -\ln x$ som antiderivert av $P(x)$. Integrerende faktor blir

$$e^{A(x)} = e^{-\ln x} = e^{\ln(1/x)} = \frac{1}{x}.$$

Multipliserer vi differensiallikningen med denne, får vi

$$\frac{1}{x}\frac{dy}{dx} + \left(-\frac{1}{x^2}\right)y = \frac{1}{x},$$

og som planlagt kan venstresida skrives om slik at vi får

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}y\right) = \frac{1}{x}.$$

Antideriverer vi begge sider, får vi

$$\frac{1}{x}y = \ln x + C,$$

og løsningen blir

$$y = x(\ln x + C).$$

Eksempel. Løs initialverdiproblemet

$$\frac{dx}{dt} + x = e^{2t},$$

der $x = 1$ når $t = 0$.

Likningen er på form $\frac{dx}{dt} + P(t)x = Q(t)$. For å finne en integrerende faktor, finner vi først en antiderivert av koeffisienten $P(t) = 1$ foran x. Vi velger t, som gir integrerende faktor e^t, og multiplikasjon med denne gir

$$e^t \frac{dx}{dt} + e^t x = e^{3t},$$

altså

$$\frac{d}{dt}(e^t x) = e^{3t}.$$

Antiderivering gir $e^t x = \frac{1}{3}e^{3t} + C$, og multiplikasjon med e^{-t} gir generell løsning $x = \frac{1}{3}e^{2t} + Ce^{-t}$. Ved å sette $t = 0$ og $x = 1$, får vi $1 = 1/3 + C$, altså $C = 2/3$, og løsningen er $x = \frac{1}{3}e^{2t} + \frac{2}{3}e^{-t}$.

Eksempel. Løs differensiallikningen

$$\frac{1}{x}\frac{dy}{dx} + 2y = 1.$$

Vi får likningen på form $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$ ved å multiplisere med x,

$$\frac{dy}{dx} + 2xy = x.$$

En antiderivert av koeffisienten $2x$ foran y er x^2, og vi velger e^{x^2} som integrerende faktor,

$$e^{x^2}\frac{dy}{dx} + 2xe^{x^2}y = xe^{x^2},$$

eller

$$\frac{d}{dx}(e^{x^2}y) = xe^{x^2}.$$

Antiderivering gir $e^{x^2}y = \frac{1}{2}e^{x^2} + C$, dvs. $y = 1/2 + Ce^{-x^2}$.