Norges
teknisk–naturvitenskapelige
universitet
Institutt for matematiske fag

MA0002 Brukerkurs i matematikk B
Vår 2013

Løsningsforslag — Øving 1

$\boxed{7.1.1}$ Regn ut integralet

$$\int 2x\sqrt{x^2+3}\,\mathrm{d}x$$

ved å foreta substitusjonen $u = x^2 + 3$.

Løsning: Substitusjonen $u = x^2 + 3$ gir $\mathrm{d}u = 2x\mathrm{d}x$, og dermed blir

$$\begin{aligned}\int 2x\sqrt{x^2+3}\,\mathrm{d}u &= \int \sqrt{u}\,\mathrm{d}u = \int u^{1/2}\,\mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{1/2+1}u^{1/2+1} + C = \frac{1}{3/2}u^{3/2} + C = \frac{2}{3}(x^2+3)^{3/2} + C\end{aligned}$$

□

$\boxed{7.1.8}$ Regn ut integralet

$$\int x\cos(x^2-1)\,\mathrm{d}x$$

ved å foreta substitusjonen $u = x^2 - 1$.

Løsning: La $u = x^2 - 1$, som gir $\mathrm{d}u = 2x\,\mathrm{d}x$ eller $(1/2)\mathrm{d}u = x\,\mathrm{d}x$, og dermed blir

$$\int x\cos(x^2-1)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \cos u\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\sin u + C = \frac{1}{2}\sin(x^2-1) + C$$

□

$\boxed{7.1.17}$ Regn ut integralet

$$\int \sqrt{x+3}\,\mathrm{d}x$$

ved å foreta en passende substitusjon.

Løsning: La $u = x + 3$, som gir $\mathrm{d}u = \mathrm{d}x$. Dermed blir

$$\int \sqrt{x+3}\,\mathrm{d}x = \int \sqrt{u}\,\mathrm{d}u = \frac{2}{3}u^{3/2} + C = \frac{2}{3}(x+3)^{3/2} + C$$

□

$\boxed{7.1.32}$ Regn ut integralet

$$\int \sin^3(x)\cos x\,\mathrm{d}x$$

ved å foreta en passende substitusjon.

Løsning: La $u = \sin x$, som gir $\mathrm{d}u = \cos x\,\mathrm{d}x$. Dermed blir

$$\int \sin^3(x)\cos x\,\mathrm{d}x = \int u^3\,\mathrm{d}u = \frac{1}{4}u^4 + C = \frac{\sin^4 x}{4} + C$$

□

$\boxed{7.1.33}$ Regn ut integralet

$$\int \frac{(\ln x)^2}{x}\,\mathrm{d}x$$

ved å foreta en passende substitusjon.

Løsning: La $u = \ln x$, da blir $\mathrm{d}u = (1/x)\,\mathrm{d}x$. Det gir

$$\int \frac{(\ln x)^2}{x}\,\mathrm{d}x = \int u^2\,\mathrm{d}u = \frac{1}{3}u^3 + C = \frac{1}{3}(\ln x)^3 + C$$

□

$\boxed{7.1.39}$ Regn ut integralet

$$\int g'(x)[g(x)]^n\,\mathrm{d}x$$

ved å foreta en passende substitusjon. Her er både g og g' kontinuerlige funksjoner.

Løsning: La $u = g(x)$, da blir $\mathrm{d}u = g'(x)\,\mathrm{d}x$. Det gir

$$\int g'(x)[g(x)]^n\,\mathrm{d}x = \int u^n\,\mathrm{d}u = \frac{1}{n+1}u^{n+1} + C = \frac{g(x)^{n+1}}{n+1} + C$$

□

$\boxed{7.2.1}$ Bruk delvis integrasjon for å regne ut

$$\int x \cos x \, dx$$

Løsning: Vi velger $u = x$, $v' = \cos x$. Da blir $u' = 1$ og $v = \sin x$. Delvis integrasjon gir

$$\int x \cos x \, dx = x \sin x - \int 1 \cdot \sin x \, dx = x \sin x + \cos x + C$$

□

$\boxed{7.2.9}$ Bruk delvis integrasjon for å regne ut

$$\int x^2 e^x \, dx$$

Løsning: La $u = x^2$ og $v' = e^x$. Da blir $v = e^x$ og $u' = 2x$, og delvis integrasjon gir

$$\int x^2 e^x \, dx = x^2 e^x - 2 \int x e^x \, dx$$

For å regne ut det andre integralet, bruker vi delvis integrasjon en gang til, med $u = x$ og $v' = e^x$; vi regner ut det andre integralet separat for å gjøre ting litt ryddigere:

$$\int x e^x \, dx = x e^x - \int e^x \, dx = x e^x - e^x + C = e^x(x-1) + C$$

Vi setter svaret inn over:

$$\int x^2 e^x \, dx = x^2 e^x - 2e^x(x-1) + C = e^x(x^2 - 2x + 2) + C$$

□

$\boxed{7.2.12}$ Bruk delvis integrasjon for å regne ut

$$\int x^2 \ln x \, dx$$

Løsning: Vi velger $u = \ln x$ og $v' = x^2$, som gir $u' = 1/x$ og $v = x^3/3$. Delvis integrasjon gir:

$$\begin{aligned} \int x^2 \ln x \, dx &= \frac{x^3 \ln x}{3} - \int \frac{x^3}{3} \cdot \frac{1}{x} \, dx = \frac{x^3 \ln x}{3} - \frac{1}{3} \int \frac{x^2}{} dx \\ &= \frac{x^3 \ln x}{3} - \frac{1}{9} x^3 + C = \frac{x^3}{3} \left(\ln x - \frac{1}{3} \right) + C \end{aligned}$$

□

$\boxed{\text{7.2.36}}$ **a)** Bruk delvis integrasjon for å vise at

$$\int x^n e^x \,\mathrm{d}x = x^n e^x - n \int x^{n-1} e^x \,\mathrm{d}x$$

En slik formel kalles en *reduksjonsformel*, da den reduserer eksponenten med 1 hver gang den brukes.

Løsning: La $u = x^n$ og $v' = e^x$, som gir $u' = nx^{n-1}$ og $v = e^x$. Delvis integrasjon gir

$$\int x^n e^x \,\mathrm{d}x = x^n e^x - n \int x^{n-1} e^x \,\mathrm{d}x$$

som var det vi skulle vise. □

b) Bruk reduksjonsformelen fra (a) (gjentatte ganger, om nødvendig) til å regne ut

$$\int x^3 e^x \,\mathrm{d}x$$

Løsning: Vi finner

$$\begin{aligned}\int x^3 e^x \,\mathrm{d}x &= x^3 e^x - 3 \int x^2 e^x \,\mathrm{d}x \\ &= x^3 e^x - 3 \left[x^2 e^x - 2 \int x e^x \,\mathrm{d}x\right] \\ &= x^3 e^x - 3 \left[x^2 e^x - 2 \left[x e^x - \int e^x \,\mathrm{d}x\right]\right] \\ &= e^x (x^3 - 3x^2 + 6x - 6) + C\end{aligned}$$

□

$\boxed{\text{7.2.49}}$ Bruk enten substitusjon eller delvis integrasjon for å regne ut

$$\int x e^{-2x} \,\mathrm{d}x$$

Løsning: Vi bruker delvis integrasjon, med $u = x$ og $v' = e^{-2x}$. Det gir $u' = 1$ og $v = -e^{-2x}/2$. Sistnevnte kan sees ved substitusjon; vi lar $u = -2x$, som gir $\mathrm{d}u = -2\mathrm{dx}$ eller $\mathrm{dx} = (-1/2)\mathrm{d}u$:

$$v = \int e^{-2x} \,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2} \int e^u \,\mathrm{d}u = -\frac{1}{2} e^u + C = -\frac{1}{2} e^{-2x} + C$$

Vi kan velge $C = 0$ (vi trenger kun *en* antiderivert til e^{-2x}, ikke alle).

Delvis integrasjon gir

$$\int x e^{-2x} \,\mathrm{d}x = -\frac{x e^{-2x}}{2} + \frac{1}{2} \int e^{-2x} \,\mathrm{d}x = -\frac{x e^{-2x}}{2} - \frac{e^{-2x}}{4} + C$$

□

$\boxed{\text{7.2.59}}$ Bruk enten substitusjon eller delvis integrasjon for å regne ut

$$\int \frac{x}{x^2+3}\,\mathrm{d}x$$

Løsning: Vi bruker substitusjon med $u = x^2 + 3$, som gir $\mathrm{d}u = 2x\,\mathrm{d}x$ eller $x\,\mathrm{d}x = (1/2)\,\mathrm{d}u$. Det gir

$$\int \frac{x}{x^2+3}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{1}{u}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\ln|u| + C = \frac{1}{2}\ln(x^2+3) + C$$

$\square$