



10.6.3 La

$$f(x, y) = x^2y - 4x^2 - 4y$$

der $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Finn alle kandidater for lokale ekstrema og bruk Hesse-matrisen til å klassifisere disse (maksimum, minimum eller sadelpunkt).

Løsning: Vi har

$$\nabla f(x, y) = \begin{bmatrix} 2xy - 8x \\ x^2 - 4 \end{bmatrix}$$

og $\nabla f(x, y) = \mathbf{0}$ hvis og bare hvis

$$\begin{aligned} 2xy - 8x &= 0 \\ x^2 - 4 &= 0 \end{aligned}$$

Siste ligning gir $x^2 = 4$ eller $x = \pm 2$, som innsatt i første ligning gir

$$2 \cdot 2y = 8 \cdot 2 = 16,$$

altså $y = 4$ eller

$$2 \cdot (-2) y = 8 \cdot -2$$

som igjen betyr at $y = 4$. Så de kritiske punktene er $(2, 4)$ og $(-2, 4)$. Hesse-matrisen er gitt ved

$$\text{Hess } f(x, y) = \begin{bmatrix} 2y - 8 & 2x \\ 2x & 0 \end{bmatrix}$$

og vi ser at

$$\text{Hess } f(2, 4) = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$$

Da blir $\det \text{Hess } f(2, 4) = -16 < 0$, så $(2, 4)$ er et sadelpunkt. Tilsvarende blir

$$\text{Hess } f(-2, 4) = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}$$

og $\det \text{Hess } f(-2, 4) = -16 < 0$, så $(-2, 4)$ er også et sadelpunkt. □

10.6.8 La

$$f(x, y) = yxe^{-y}$$

der $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Finn alle kandidater for lokale ekstrema og bruk Hesse-matrisen til å klassifisere disse (maksimum, minimum eller sadelpunkt).

Løsning: Vi har

$$\nabla f(x, y) = \begin{bmatrix} ye^{-y} \\ xe^{-y} - yxe^{-y} \end{bmatrix}$$

og det er lett å se at eneste kritiske punkt blir $(0, 0)$. Hesse-matrisen er gitt ved

$$\text{Hess } f(x, y) = \begin{bmatrix} 0 & e^{-y} - ye^{-y} \\ e^{-y} - ye^{-y} & -xe^{-y} - xe^{-y} + yxe^{-y} \end{bmatrix}$$

og

$$\text{Hess } f(0, 0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

så $\det \text{Hess } f(0, 0) = -1 < 0$, altså er $(0, 0)$ et sadelpunkt. □

10.6.11 I denne oppgaven, skal vi illustrere det faktum at dersom en av egenverdiene til Hesse-matrisen er 0 i et punkt der $\nabla f(x, y) = \mathbf{0}$, så kan vi ikke si noe om hvorvidt punktet der et lokalt ekstremepunkt basert på Hesse-matrisen. Betrakt funksjonene

$$f_1(x, y) = x^2$$

$$f_2(x, y) = x^2 + y^3$$

$$f_3(x, y) = x^2 + y^4$$

a) Vis at

$$\nabla f_i(0, 0) = \mathbf{0}$$

for $i = 1, 2, 3$.

Løsning: Vi har

$$\nabla f_1(x, y) = [2x \ 0]'$$

$$\nabla f_2(x, y) = [2x \ 3y^2]'$$

$$\nabla f_3(x, y) = [2x \ 4y^3]'$$

og det er lett å se at $\nabla f_i(0, 0) = \mathbf{0}$ for $i = 1, 2, 3$. □

b) Vis at

$$\text{Hess } f_i(0, 0) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

og bestem egenverdiene til $\text{Hess } f_i(0, 0)$.

Løsning: Vi ser at

$$\text{Hess } f_1(x, y) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

og

$$\text{Hess } f_2(x, y) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6y \end{bmatrix},$$

og til slutt

$$\text{Hess } f_3(x, y) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 12y^2 \end{bmatrix}$$

og det er lett å se at

$$\text{Hess } f_i(0, 0) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

for $i = 1, 2, 3$. Siden dette er en diagonalmatrise, er egenverdiene 2 og 0. $\square$

- c) Siden en av egenverdiene til $\text{Hess } f_i(0, 0)$ er 0, kan vi ikke bruke kriteriet på side 551 til å bestemme oppførselen til f_i omkring $(0, 0)$. Bruk figur 10.68-10.70 (i læreboka) til å beskrive hva som skjer.

Løsning: For $f_1(x, y) = x^2$ er $(0, 0)$ et (globalt) minimum (fasiten sier noe annet, men vi har $x^2 = f_1(x, y) \geq f_1(0, 0) = 0$ for alle x, y , som impliserer at $(0, 0)$ er et globalt minimum for $f_1(x, y)$.) Funksjonen $f_2(x, y)$ har et sadelpunkt i $(0, 0)$, mens $f_3(x, y)$ har et (globalt) minimum i $(0, 0)$. $\square$

10.6.21 Finn de globale ekstrempunktene til

$$f(x, y) = x^2 + y^2 + 4x - 1$$

på disken

$$D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 9\}$$

Løsning: Vi kan først merke oss at siden D er lukket og begrenset, og f er kontinuerlig, så har f (minst) et globalt maksimum og (minst) et globalt minimum. Vi undersøker først hva som skjer på det indre av D ; her regner vi ut gradienten og finner kritiske punkter på vanlig måte. Vi har

$$\nabla f(x, y) = [2x + 4 \quad 2y]'$$

og $\nabla f(x, y) = 0$ hvis og bare hvis $2y = 0$ (altså $y = 0$) og $2x = -4$, altså $x = -2$. Dette punktet ligger i det indre av D (siden $(-2)^2 + 0^2 = 4 < 9$). Vi har

$$\text{Hess } f(x, y) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Dermed har $\text{Hess } f(-2, 0)$ to (strengt) positive egenverdier (begge er lik 2), og vi kan konkludere med at f har et lokalt minimum i $(-2, 0)$, og verdien der er

$$f(-2, 0) = (-2)^2 + 0^2 + 4 \cdot (-2) - 1 = -5$$

Vi parametriserer randen (som er en sirkel med radius 3) ved

$$\begin{aligned}x(\theta) &= 3 \cos \theta \\y(\theta) &= 3 \sin \theta\end{aligned}$$

som gir

$$f(\theta) = f(x(\theta), y(\theta)) = 3^2 \cos^2 \theta + 3^2 \sin^2 \theta + 12 \cos \theta - 1 = 8 + 12 \cos \theta$$

Vi har

$$f'(\theta) = -12 \sin \theta$$

og $f'(\theta) = 0$ for $\theta = 0, \pi$ (det er tilstrekkelig å begrense oss til $0 \leq \theta < 2\pi$). Vi finner at

$$f(0) = 8 + 12 \cdot 1 = 20$$

og

$$f(\pi) = 8 + 12 \cdot (-1) = -4$$

Det følger at $(-2, 0)$ er et globalt minimum for f , og at $(x(0), y(0)) = (3, 0)$ er et globalt maksimum for f . $\square$

10.6.31 Finn det minimale overflatearealet til en rektangulær, lukket (bunn, topp og fire sideflater) boks med volum 216 m^3 .

Løsning: La x, y, z beskrive sidelengdene til boksen. Volumet er da gitt ved

$$V(x, y, z) = xyz = 216 \text{ m}^3$$

og overflatearealet er gitt ved

$$O(x, y, z) = 2xy + 2xz + 2yz = 2(xy + xz + yz)$$

Vi kan løse den første ligningen for en av variablene, f.eks z , og deretter sette dette inn i ligningen for overflatearealet (som vi skal finne minimum til):

$$z = \frac{216}{xy}$$

Dermed blir

$$O(x, y) = 2(xy + xz + yz) = 2\left(xy + \frac{216x}{xy} + \frac{216y}{xy}\right) = 2\left(xy + \frac{216}{y} + \frac{216}{x}\right)$$

Vi finner at

$$\nabla O(x, y) = \begin{bmatrix} 2\left(y - \frac{216}{x^2}\right) \\ 2\left(x - \frac{216}{y^2}\right) \end{bmatrix}$$

Det følger at $\nabla O(x, y) = \mathbf{0}$ hvis og bare hvis

$$\begin{aligned}y - \frac{216}{x^2} &= 0 \\x - \frac{216}{y^2} &= 0\end{aligned}$$

eller

$$y = \frac{216}{x^2}$$

$$x = \frac{216}{y^2}$$

Dersom vi setter den andre ligningen inn i den første, får vi

$$y = \frac{216}{216^2/y^4} = \frac{y^4}{216}$$

som ved divisjon med y på begge sider (vi kan anta at $y > 0$) gir $y^3 = 216$, altså $y = 216^{1/3} = (2^3 \cdot 3^3)^{1/3} = 2 \cdot 3 = 6$. Da blir

$$x = \frac{216}{216^{1/3}} = 216^{3/3-1/3} = 216^{2/3} = 6$$

og tilsvarende blir $z = 216/6^2 = 6$, så omkretsen blir

$$O(6, 6, 6) = 2(36 + 36 + 36) = 216$$

Det gjenstår å sjekke at $(6, 6)$ faktisk er et lokalt minimum for $O(x, y)$. For å gjøre det, regner vi ut Hesse-matrisen til $O(x, y)$, altså

$$\text{Hess } O(x, y) = \begin{bmatrix} 4 \cdot \frac{216}{x^3} & 2 \\ 2 & 4 \cdot \frac{216}{y^3} \end{bmatrix}$$

og

$$\text{Hess } O(6, 6) = \begin{bmatrix} 4 \cdot \frac{216}{6^3} & 2 \\ 2 & 4 \cdot \frac{216}{6^3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

og vi ser at $\det \text{Hess } O(6, 6) = 16 - 4 = 12 > 0$, og $\text{tr Hess } O(6, 6) = 4 + 4 = 8 > 0$, så $O(x, y)$ har et lokalt minimum i $(6, 6)$ og dermed et globalt minimum der, siden det ikke finnes andre kritiske punkter. Det betyr at det minste overflatearealet er $216m^2$. $\square$

10.6.33 Avstanden mellom origo og punktet (x, y, z) er gitt ved

$$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Finn den minste avstanden mellom origo og planet $x + y + z = 1$ (Hint: finn minimum for kvadratet av avstanden mellom origo og planet).

Løsning: Vi betrakter altså funksjonen

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2,$$

for punkter i planet gitt ved ligningen $x + y + z = 1$. Vi kan løse sistnevnte ligning for z , og sett inn:

$$z = 1 - x - y$$

som gir

$$\begin{aligned} z^2 &= (1 - x - y)(1 - x - y) = 1 - x - y - x + x^2 + xy - y + xy + y^2 \\ &= 1 - 2x - 2y + 2xy + x^2 + y^2 \end{aligned}$$

Dermed blir

$$\begin{aligned} f(x, y) &= x^2 + y^2 + z^2 = x^2 + y^2 + (1 - 2x - 2y + 2xy + x^2 + y^2) \\ &= 2x^2 + 2y^2 - 2x - 2y + 2xy + 1 \end{aligned}$$

Vi har

$$\nabla f(x, y) = \begin{bmatrix} 4x - 2 + 2y \\ 4y - 2 + 2x \end{bmatrix}$$

og vi får kritiske punkter der $4x - 2 + 2y = 0$ og $4y - 2 + 2x = 0$. Første ligning gir $2x = 1 - y$, som innsatt i andre ligning gir

$$4y - 2 + (1 - y) = 3y - 1 = 0$$

eller $y = 1/3$, som gir $2x = 1 - 1/3 = 2/3$ eller $x = 1/3$. Vi finner at

$$\text{Hess } f(x, y) = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

så $\det \text{Hess } f(1/3, 1/3) = 16 - 4 = 12 > 0$, og $\text{tr Hess } f(1/3, 1/3) = 8 > 0$, så dette er et lokalt minimum, og dermed også et globalt minimum, siden det ikke finnes andre kritiske punkter. Vi finner at dersom $x = y = 1/3$, så er $z = 1 - 2/3 = 1/3$ og den minste avstanden mellom origo og planet blir dermed

$$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{1/9 + 1/9 + 1/9} = \sqrt{1/3} = 1/\sqrt{3}$$

□

10.6.34 Gitt en symmetrisk matrise

$$A = \begin{bmatrix} a & c \\ c & b \end{bmatrix}$$

der a, b, c er reelle tall, vis at egenverdiene er reelle (Hint: regn ut egenverdiene).

Løsning: Vi har

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} a - \lambda & c \\ c & b - \lambda \end{vmatrix} = (a - \lambda)(b - \lambda) - c^2 = \lambda^2 - (a + b)\lambda + ab - c^2$$

Vi bruker formelen for løsning av 2.gradsligninger, som gir

$$\lambda = \frac{(a + b) \pm \sqrt{(a + b)^2 - 4ab + 4c^2}}{2}$$

For at egenverdiene skal bli reelle, må $(a+b)^2 - 4ab + 4c^2 \geq 0$. La oss vise at dette alltid er tilfellet; vi regner ut og skriver uttrykket litt

$$(a+b)^2 - 4ab + 4c^2 = a^2 + 2ab + b^2 - 4ab + 4c^2 = a^2 - 2ab + b^2 + 4c^2 = (a-b)^2 + 4c^2$$

som alltid er ≥ 0 , siden det kan skrives som summen av to kvadrater. $\square$

10.6.37 Bruk Lagrangemultiplikatorer til å finne maksima og minima for

$$f(x, y) = 3x^2 + y$$

under bibetingelsen $x^2 + y^2 = 1$.

Løsning: Bibetingelsen $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$ er en sirkel med radius 1, og dermed en begrenset mengde i planet. Vi har

$$\nabla f(x, y) = \begin{bmatrix} 6x \\ 1 \end{bmatrix}$$

og

$$\nabla g(x, y) = \begin{bmatrix} 2x \\ 2y \end{bmatrix}$$

Ligningen $\nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y)$ kan skrives

$$6x = 2\lambda x$$

$$1 = 2\lambda y$$

Multiplikasjon av første ligning med y og andre ligning med x gir $6xy = x$. Det betyr at enten så er $x = 0$, og dermed blir $y = \pm 1$ (fra ligningen for en sirkel), eller så er $x \neq 0$ som gir $6y = 1$, altså $y = 1/6$. Innsatt i ligningen $g(x, y) = 0$ får vi

$$x^2 = 1 - y^2 = 1 - \frac{1}{36} = \frac{35}{36}$$

eller $x = \pm\sqrt{35}/6$. Vi har dermed punktene $(0, 1)$, $(0, -1)$, $(\sqrt{35}/6, 1/6)$ og $(-\sqrt{35}/6, 1/6)$ som kandidater for maksima/minima. Det er tilstrekkelig å sammenligne funksjonsverdiene for å bestemme hva som er hva:

$$f(0, 1) = 3 \cdot 0^2 + 1 = 1$$

$$f(0, -1) = 3 \cdot 0^2 - 1 = -1$$

$$f(\sqrt{35}/6, 1/6) = 3 \cdot \frac{35}{36} + 1/6 = \frac{111}{36}$$

$$f(-\sqrt{35}/6, 1/6) = 3 \cdot \frac{35}{36} + 1/6 = \frac{111}{36}$$

Dermed har f globale maksima i $(\pm\sqrt{35}/6, 1/6)$ og globalt minimum i $(0, -1)$. $\square$

10.6.41 Bruk Lagrangemultiplikatorer til å finne maksima og minima for

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

under bibetingelsen $3x - 2y = 4$.

Løsning: Bibetingelsen kan skrives $g(x, y) = 3x - 2y - 4 = 0$. Merk at løsningsmengden til $g(x, y) = 0$ ikke er begrenset, så vi kan ikke uten videre garantere at et globalt maksimum eller minimum eksisterer (og det blir vanskeligere å avgjøre om et punkt er et globalt maksimum eller et minimum eller ingen av delene). Vi har

$$\nabla f(x, y) = \begin{bmatrix} 2x \\ 2y \end{bmatrix}$$

og

$$\nabla g(x, y) = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Merk at $\nabla g(x, y) \neq \mathbf{0}$ for alle x, y . Vi løser ligningen $\nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y)$, som kan skrives

$$\begin{aligned} 2x &= 3\lambda \\ 2y &= -2\lambda \end{aligned}$$

Multiplikasjon av første ligning med -2 , den andre med 3 gir $-4x = 6y$ eller $y = -4/6x = -2/3x$. Fra bibetingelsen får vi nå at

$$3x - 2 \cdot (-2/3)x = 3x + 4/3x = 13/3x = 4$$

altså $x = 12/13$. Dermed blir

$$y = -2/3x = \frac{-2 \cdot 12}{13 \cdot 3} = \frac{-24}{39} = \frac{-8}{13}$$

Dette må være et minimum, noe som er relativt lett å se utifra grafen til f , men vi kan også vise det mer formelt ved å løse bibetingelsen for (f.eks) y , altså $y = 3/2x - 2$, og sette dette inn i f som gir (etter litt regning)

$$f(x) = \frac{13}{4}x^2 - 6x + 4$$

Vi finner at $f'(x) = 0$ for $x = 12/13$ og andrederiverttesten avslører at dette er et lokalt minimum (siden $f''(12/13) > 0$). Siden det ikke finnes andre kritiske punkter, er det også et globalt minimum. $\square$

10.6.56 La

$$f(x, y) = x + y, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

med bibetingelse $xy = 1$.

a) Bruk Lagrange-multiplikatorer til å finne alle lokale ekstrema.

Løsning: Bibetingelsen kan skrives $g(x, y) = xy - 1 = 0$, og vi har

$$\nabla f(x, y) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

og

$$\nabla g(x, y) = \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix}$$

Dermed må $1 = \lambda y$ og $1 = \lambda x$ for at vi skal ha et lokalt ekstrempunkt (langs kurven $g(x, y) = 0$), eller $x = y$ etter at vi har eliminert λ på vanlig måte (gang første ligning med x og andre ligning med y). Dersom $x = y$ og $xy = 1$, må vi ha $x^2 = 1$, altså $x = \pm 1$. Punktene som oppfyller $\nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y)$ blir dermed $(1, 1)$ og $(-1, -1)$.

Vi kan vise at dette faktisk er lokale ekstrempunkter (husk at kurven $xy = 1$ ikke er begrenset) ved å løse bibetingelsen for y , som gir $y = 1/x$, og sette dette inn for y i $f(x, y)$, og dermed stå igjen med følgende funksjon i en variabel

$$f(x) = f(x, 1/x) = x + 1/x$$

Derivasjon gir

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$$
$$f''(x) = \frac{2}{x^3}$$

og vi gjenfinner punktene $x = \pm 1$. Det faktum at $f''(x) \neq 0$ i begge disse punktene, gjør at vi kan konkludere med at dette virkelig er lokale ekstrema ($x = -1$ er et lokalt maksimum, mens $x = 1$ er et lokalt minimum). $\square$

b) Finnes det globale ekstrema?

Løsning: Nei. Siden $y = 1/x$, går y mot $+\infty$ når $x \rightarrow 0^+$ og mot $-\infty$ når $x \rightarrow 0^-$. Det betyr at også $f(x, y) \rightarrow +\infty$ når $x \rightarrow 0^+$ langs kurven $xy = 1$, og mot $-\infty$ når $x \rightarrow 0^-$ langs kurven. Det betyr at ingen globale maksima eller minima kan eksistere. $\square$