Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

MA0002 Brukerkurs i matematikk B
Vår 2013

Løsningsforslag — Øving 11

$\boxed{11.1.1}$ Skriv systemet

$$\frac{dx_1}{dt} = 2x_1 + 3x_2$$
$$\frac{dx_2}{dt} = -4x_1 + x_2$$

på matriseform.

Løsning: Dersom $d\mathbf{x}/dt = \begin{bmatrix} dx_1/dt & dx_2/dt \end{bmatrix}$, så er

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$\square$

$\boxed{11.1.7}$ Betrakt systemet

$$\frac{dx_1}{dt} = x_1 + 3x_2$$
$$\frac{dx_2}{dt} = -x_1 + 2x_2$$

Bestem retningsvektorene som tilordnes punktene $(1,0)$, $(0,1)$, $(-1,1)$, $(0,-1)$, $(-3,1)$, $(0,0)$, og $(-2,1)$, og tegn disse i $x_1 - x_2$-planet.

Løsning: For $(1,0)$ får vi

$$\frac{dx_1}{dt} = 1 + 3 \cdot 0 = 1$$
$$\frac{dx_2}{dt} = -1 + 2 \cdot 0 = -1$$

altså vektoren $\begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}'$. Tilsvarende, for $(0,1)$ får vi

$$\frac{dx_1}{dt} = 0 + 3 \cdot 1 = 3$$
$$\frac{dx_2}{dt} = -0 + 2 \cdot 1 = 2$$

altså vektoren $\begin{bmatrix} 3 & 2 \end{bmatrix}'$. Og så videre (se fasit for resten av vektorene og tegning). $\square$

$\boxed{11.1.9}$ På figur 11.18-11.21 (i læreboka) er det tegnet noen vektorfelt. Hvert av feltene korresponderer til et system av differensialligninger på formen

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = A\mathbf{x}$$

der A er en av følgende 2×2-matriser:

$$\textbf{a)} \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \textbf{b)} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \qquad \textbf{c)} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \textbf{d)} \quad \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Bestem hvilket system som svarer til hvilken figur.

Løsning: Det er naturligvis mange måter å løse denne oppgaven på, og følgende er derfor bare en enkelt mulighet.

Det er ikke vanskelig å se at system **c)** svarer til figur 11.19. Siden matrisen er identitetsmatrisen, vil vektoren i et gitt punkt $P = (x, y)$ simpelthen bli vektoren $\vec{OP}$, altså $\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}'$. Pilene skal altså peke i samme retning som vektoren fra origo til det gitte punktet (og også ha samme lengde, men det er ikke illustrert på figuren).

Videre svarer system **d)** til figur 11.18, noe som kan sees ved å betrakte den vertikale linjen $x_1 = 0$. Langs den blir altså $dx_1/dt = -x_2$ og $dx_2/dt = x_1 = 0$, så vektoren blir horisontal og vil peke mot høyre (positiv x_1-retning) for $x_2 < 0$ og mot venstre (negativ x_1-retning) for $x_2 > 0$. Det er nettopp det vi ser på figur 11.18 (og ingen andre steder).

System **a)** svarer til figur 11.21 - se igjen på linjen $x_1 = 0$. Da blir $d\mathbf{x}/dt = \begin{bmatrix} 0 & x_2 \end{bmatrix}'$, altså en vektor som er vertikal (peker opp for $x_2 > 0$ og nedover for $x_2 < 0$). Vi ser denne oppførselen både på figur 11.21 og 11.19, men 11.19 har vi som kjent allerede klassifisert.

Det eneste gjenværende systemet er **b)**, som dermed må svare til figur 11.20. $\square$

$\boxed{11.1.11}$ Retningsfeltet (vektorfeltet) til systemet

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= 2x_1 + 3x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} &= -x_1 + x_2 \end{aligned}$$

er tegnet på figur 11.23. Skisser løsninskurven som går gjennom punktet $(2, -1)$.

Løsning: Se fasit. $\square$

$\boxed{11.1.13}$ Finn den generelle løsningen til systemet

$$\begin{bmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

og skisser linjene utspent av egenvektorene. Tegn en pil på hver linje i retningen som en løsningskurve ville fortsette, dersom den starter på en av egenvektorene.

Løsning: For å spare arbeid, bruker vi formelen

$$\det(A - \lambda I) = \lambda^2 - \lambda \operatorname{tr} A + \det A$$

fra avsnitt 9.2 (formel 9.20). For den oppgitte matrisen A har vi $\operatorname{tr} A = 4$ og $\det A = -12$, altså må hver egenverdi λ oppfylle $\lambda^2 - 4\lambda - 12 = 0$

$$\lambda = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 4 \cdot 12}}{2} = \frac{4 \pm 8}{2}$$

altså $\lambda \in \{6, -2\}$.

For $\lambda = 6$ får vi

$$A - 6I = \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}$$

Første rad er altså (-1) ganger andre rad, og vi står igjen med en enkelt ligning for komponentene u_1, u_2 i en tilhørende egenvektor, nemlig $5u_1 - 3u_2 = 0$. Vi har dermed at

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

er en egenvektor tilhørende $\lambda = 6$.

For $\lambda = -2$, får vi

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}$$

og systemet er ekvivalent med et system bestående av en enkelt ligning, nemlig $v_1 + v_2 = O$, og vi har dermed at

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

er en egenvektor tilhørende $\lambda = -2$. Dermed er løsningen gitt ved

$$\mathbf{x}(t) = c_1 e^{6t} \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} + c_2 e^{-2t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Dersom startpunktet $\mathbf{x}(0)$ ligger langs egenvektoren $\mathbf{u}$ tilhørende $\lambda = 6$, har vi $c_2 = 0$, og dermed blir løsningen

$$\mathbf{x}(t) = c_1 e^{6t} \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Løsningskurven vil dermed ligge langs linjen utspent av vektoren $\mathbf{u}$, og vil gå i retning vekk fra origo. For den andre egenvektoren, vil løsningskurven derimot nærme seg origo, siden egenverdien er negativ. Se fasit for tegning. □

$\boxed{11.1.25}$ Løs initialverdiproblemet

$$\begin{bmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

med $x_1(0) = -3$ og $x_2(0) = 1$.

Løsning: Siden $\operatorname{tr} A = 2$ og $\det A = -15$, finner vi at

$$\det(A - \lambda I) = \lambda^2 - 2\lambda - 15$$

som har løsninger gitt ved

$$\lambda = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 4 \cdot 15}}{2} = \frac{2 \pm 8}{2}$$

altså $\lambda = 5$ eller $\lambda = -3$. Tilhørende egenvektorer finner vi ved å løse systemet $(A - \lambda I)\mathbf{u} = \mathbf{0}$. For $\lambda = 5$ finner vi

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} -1 & 7 \\ 1 & -7 \end{bmatrix}$$

og systemet kan reduseres til en enkelt ligning $u_1 - 7u_2 = 0$, så det følger at

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \end{bmatrix}$$

For $\lambda = -3$ får vi

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 7 & 7 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

og systemet kan igjen reduseres til en enkelt ligning, nemlig $v_1 + v_2 = 0$, altså er

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

en egenvektor tilhørende $\lambda = -3$. Den generelle løsningen er dermed gitt ved

$$\mathbf{x}(t) = c_1 e^{5t} \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 e^{-3t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Vi ser at

$$\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7c_1 + c_2 \\ c_1 - c_2 \end{bmatrix}$$

Vi skal ha $x_1(0) = -1$ og $x_2(0) = -2$, så vi må løse systemet

$$\begin{aligned} 7c_1 + c_2 &= -1 \\ c_1 - c_2 &= -2 \end{aligned}$$

Dette kan gjøres akkurat som i avsnitt 9.1, og vi ender opp med $c_1 = -3/8$ og $c_2 = 13/8$. Dermed blir løsningen

$$\mathbf{x}(t) = \frac{-3}{8} e^{5t} \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{13}{8} e^{-3t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

□

$\boxed{11.1.28}$ Gitt systemet

$$\begin{bmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \tag{1}$$

a) Vis at matrisen A har kun en (gjentatt) egenverdi, nemlig $\lambda = 1$.

Løsning: Vi har

$$\det(A - \lambda I) = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2$$

som viser at $\lambda = 1$ er eneste egenverdi. $\square$

b) Vis at enhver egenvektor er på formen

$$c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

der $c_1 \neq 0$ er et reelt tall.

Løsning: Vi ser at

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

og systemet $(A - \lambda I)\mathbf{u} = \mathbf{0}$ er dermed ekvivalent med ligningen $2u_2 = 0$, som gir $u_2 = 0$. Vi har ingen betingelser på u_1, så enhver egenvektor er på formen

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ 0 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\square$

c) Vis at

$$\mathbf{y}(t) = e^t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

er en løsning av systemet (1) over.

Løsning: Vi ser ved derivasjon at

$$\begin{bmatrix} \frac{dy_1}{dt} \\ \frac{dy_2}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^t \\ 0 \end{bmatrix}$$

Videre er

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^t \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot e^t + 2 \cdot 0 \\ 0 \cdot e^t + 1 \cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^t \\ 0 \end{bmatrix}$$

som viser at $\mathbf{y}(t)$ er en løsning av (1). $\square$

d) Vis at

$$\mathbf{z}(t) = te^t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + e^t \begin{bmatrix} 0 \\ 0.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} te^t \\ 0.5 \cdot e^t \end{bmatrix}$$

er en løsning av (1).

Løsning: Derivasjon gir

$$\frac{d\mathbf{z}}{dt} = \begin{bmatrix} e^t + te^t \\ 0.5e^t \end{bmatrix}$$

og vi har at

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} te^t \\ 0.5e^t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} te^t + e^t \\ 0.5e^t \end{bmatrix}$$

som viser at $\mathbf{z}(t)$ er en løsning av (1). $\square$

e) Vis at

$$c_1\mathbf{y}(t) + c_2\mathbf{z}(t)$$

er en løsning av (1).

Løsning: Se side 593 for et bevis. □

$\boxed{11.1.29}$ Betrakt systemet

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = A\mathbf{x}(t)$$

der

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Egenverdiene er distinkte, reelle og forskjellig fra 0. Analyser stabiliteten til likevektspunktet $(0, 0)$, og avgjør om $(0, 0)$ er en stabil node (sink), ustabil node (source) eller et sadelpunkt.

Løsning: Vi ser at egenverdiene er $\lambda = 2$ og $\lambda = 3$ (diagonalelementene), og origo er dermed en ustabil node (begge egenverdiene er positive). □

$\boxed{11.1.31}$ Betrakt systemet

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = A\mathbf{x}(t)$$

der

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Egenverdiene er distinkte, reelle og forskjellig fra 0. Analyser stabiliteten til likevektspunktet $(0, 0)$, og avgjør om $(0, 0)$ er en stabil node (sink), ustabil node (source) eller et sadelpunkt.

Løsning: Vi finner at egenverdiene må oppfylle

$$\det(A - \lambda I) = \lambda^2 + \lambda - 6 = 0$$

og dermed er

$$\lambda = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 24}}{2} = \frac{-1 \pm 5}{2}$$

altså $\lambda = 2$ eller $\lambda = -3$. Origo er dermed et sadelpunkt. □

$\boxed{11.1.37}$ Betrakt systemet

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = A\mathbf{x}(t)$$

der

$$A = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 1 & -6 \end{bmatrix}$$

Egenverdiene er distinkte, reelle og forskjellig fra 0. Analyser stabiliteten til likevektspunktet $(0,0)$, og avgjør om $(0,0)$ er en stabil node (sink), ustabil node (source) eller et sadelpunkt.

Løsning: Vi har

$$\det(A - \lambda I) = \lambda^2 + 9\lambda + 19$$

og egenverdiene oppfyller dermed

$$\lambda = \frac{-9 \pm \sqrt{81 - 4 \cdot 19}}{2} = \frac{-9 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Her blir begge egenverdiene negative, og origo er dermed en stabil node. □

$\boxed{11.1.45}$ Betrakt systemet

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = A\mathbf{x}(t)$$

der

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}$$

Egenverdiene er komplekse (og hverandres konjugerte). Analyser stabiliteten til likevektspunktet $(0,0)$, og avgjør om $(0,0)$ er en stabil node (sink), ustabil node (source) eller et sadelpunkt.

Løsning: Vi har

$$\det(A - \lambda I) = \lambda^2 + 4\lambda + 16$$

og egenverdiene oppfyller dermed

$$\lambda = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 16}}{2} = \frac{-4 \pm i \cdot 4\sqrt{3}}{2}$$

($16 - 4 \cdot 16 = -3 \cdot 16 = -3 \cdot 4^2$, så $\sqrt{-3 \cdot 16} = i\sqrt{3 \cdot 16} = i\sqrt{3 \cdot 4^2} = i \cdot 4\sqrt{3}$). Realdelene til egenverdiene er dermed negativ, og origo er dermed en stabil spiral. □

$\boxed{11.1.67}$ Følgende system har to distinkte egenverdier, men en av dem er lik 0:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t)$$

a) Finn begge egenverdiene til A og de tilhørende egenvektorene.

Løsning: Vi har

$$\det(A - \lambda I) = \lambda^2 - 6\lambda = \lambda(\lambda - 6)$$

så egenverdiene blir $\lambda = 0$ og $\lambda = 6$.

For $\lambda = 0$ får vi

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Her er første rad lik 4 ganger andre rad, og systemet kan reduseres til $u_1 + 2u_2 = 0$, altså er

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

en egenvektor tilhørende egenverdien $\lambda = 0$. For $\lambda = 6$ finner vi

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} -2 & 8 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$$

og igjen er første rad et multippel av andre rad. Systemet $(A - 6I)\mathbf{v} = \mathbf{0}$ reduseres dermed til ligningen $v_1 - 4v_2 = 0$, altså er

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

en egenvektor tilhørende $\lambda = 6$. □

b) Bruk den generelle løsningen (11.26 i boka) til å finne $x_1(t)$ og $x_2(t)$.

Løsning: Vi har

$$\mathbf{x}(t) = c_1 e^{6t} \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 e^{0t} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4c_1 e^{6t} + 2c_2 \\ c_1 e^{6t} - c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

□

c) Systemets tilhørende vektorfelt er tegnet på figur 11.31 (i læreboka). Skisser linjene utspent av egenvektorene. Regn ut dx_2/dx_1 og konkluder at alle retningsvektorene er parallelle med linjen utspent av egenvektoren som svarer til egenverdien som er $\neq 0$. Beskriv med ord oppførselen til løsninger som starter i forskjellige punkter.

Løsning: Vi har

$$\frac{dx_1}{dt} = 24c_1 e^{6t}$$
$$\frac{dx_2}{dt} = 6c_1 e^{6t}$$

og

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{6c_1 e^{6t}}{24c_1 e^{6t}} = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}$$

som er nettopp stigningstallet til vektoren $\begin{bmatrix} 4 & 1 \end{bmatrix}'$. Siden egenverdien som er $\neq 0$ er positiv, er alle likevektspunkter ustabile, og løsninger som starter utenfor linjen utspent av vektoren $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ (der alle likevektspunktene ligger) vil forsvinne vekk fra den (mens løsninger som starter i et likevektspunkt blir værende der for alltid). Se fasit for tegning. □