Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

MA0002 Brukerkurs i matematikk B
Vår 2013

Løsningsforslag — Øving 12

$\boxed{11.3.1}$ Origo er et likevektspunkt for systemet

$$\frac{dx_1}{dt} = x_1 - 2x_2 + x_1x_2$$
$$\frac{dx_2}{dt} = -x_1 + x_2$$

Drøft stabiliteten til $(0,0)$ ved hjelp av egenverdier.

Løsning: Vi skriver systemet som

$$\begin{bmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 - 2x_2 + x_1x_2 \\ -x_1 + x_2 \end{bmatrix} = f(\mathbf{x})$$

og regner ut den deriverte til f i punktet $(0,0)$:

$$Df(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 1 + x_2 & -2 + x_1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

som gir

$$Df(\mathbf{0}) = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Vi ser at $\operatorname{tr} Df(\mathbf{0}) = 2$ og $\det Df(\mathbf{0}) = 1 - 2 = -1$. Egenverdiene oppfyller dermed ligningen

$$\det(Df(\mathbf{0} - \lambda I) = \lambda^2 - 2\lambda - 1 = 0$$

med løsninger

$$\lambda = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4\cdot(-1)}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{8}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}$$

siden $\sqrt{8} = \sqrt{4\cdot 2} = 2\sqrt{2}$. Siden $1 < \sqrt{2}$, får vi en positiv og en negativ egenverdi, og dermed er origo et sadelpunkt (som er ustabilt). $\square$

$\boxed{11.3.7}$ Finn alle likevektspunkter for systemet

$$\frac{dx_1}{dt} = -x_1 + 2x_1(1 - x_1)$$
$$\frac{dx_2}{dt} = -x_2 + 5x_2(1 - x_1 - x_2)$$

og drøft stabiliteten til hver av disse ved hjelp av egenverdier.

Løsning: Vi ser at første ligning kun er avhengig av x_1, og det vil dermed være enklest å starte med den; vi skriver den om til

$$-x_1 + 2x_1(1 - x_1) = -x_1 + 2x_1 - 2x_1^2 = x_1(1 - 2x_1),$$

som er 0 hvis og bare hvis $x_1 = 0$ eller $1 - 2x_1 = 0$ altså $x_1 = 1/2$. Vi setter først $x_1 = 0$ inn i andre ligning:

$$-x_2 + 5x_2(1 - 0 - x_2) = x_2(4 - 5x_2)$$

som er 0 hvis og bare hvis $x_2 = 0$ eller $5x_2 = 4$ altså $x_2 = 4/5$. Dersom $x_1 = 1/2$, får vi

$$-x_2 + 5x_2(1 - 1/2 - x_2) = -x_2 + 5x_2(1/2 - x_2) = \frac{5}{2}x_2 - x_2 - 5x_2^2 = x_2(3/2 - 5x_2)$$

som er 0 hvis og bare hvis $x_2 = 0$ eller $5x_2 = 3/2$, altså $x_2 = 3/10$. Det gir oss altså likevektspunktene $(0,0)$, $(0,4/5)$, $(1/2,0)$ og $(1/2,3/10)$.

Vi betegner som vanlig funksjonen på høyre side med $f(x_1,x_2)$; for å drøfte stabilitet, må vi regne ut $Df(x_1,x_2)$ i hvert likevektspunkt, og bestemme egenverdiene til den resulterende matrisen. Vi har

$$Df(x_1,x_2) = \begin{bmatrix} 1 - 4x_1 & 0 \\ -5x_2 & 4 - 5x_1 - 10x_2 \end{bmatrix}$$

Vi nevner i forbifarten at 0'en øverst i høyre hjørne gjør jobben vår betydelig enklere - egenverdiene er simpelthen diagonalelementene. Vi setter inn likevektspunktene og klassifiserer:

$$Df(0,0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Det betyr at $\lambda_1 = 1$ og $\lambda_2 = 4$, så $(0,0)$ er en ustabil node.

Videre blir

$$Df(0,4/5) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -4 & -4 \end{bmatrix}$$

altså er egenverdiene 1 og -4, så $(0,4/5)$ er et sadelpunkt (som er ustabilt).

For likevektspunktet $(1/2,0)$ blir

$$Df(1/2,0) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 - 5/2 \end{bmatrix}$$

Siden $4 - 5/2 = (8-5)/2 = 3/2$ har vi nok en gang en positiv og en negativ egenverdi, og dermed er $(1/2,0)$ også et sadelpunkt (ustabilt).

Til slutt har vi

$$Df(1/2,3/10) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -3/2 & 4 - 5/2 - 3 \end{bmatrix}$$

Siden $4 - 5/2 - 3 = 1 - 5/2 = -3/2$ har vi nå to negative egenverdier (-1 og $-3/2$), så $(1/2,3/10)$ er en stabil node. $\square$

$\boxed{11.3.9}$ Finn alle likevektspunkter for systemet

$$\frac{dx_1}{dt} = 4x_1(1 - x_1) - 2x_1x_2$$
$$\frac{dx_2}{dt} = x_2(2 - x_2) - x_2$$

og drøft stabiliteten til hver av disse ved hjelp av egenverdier.

Løsning: Andre ligning avhenger kun av x_2, så det er en god idè å begynne her. Vi skriver om litt

$$x_2(2 - x_2) - x_2 = 2x_2 - x_2^2 - x_2 = x_2 - x_2^2 = x_2(1 - x_2),$$

som er 0 hvis og bare hvis $x_2 = 0$ eller $x_2 = 1$. Dersom vi setter $x_2 = 0$ blir den første ligningen

$$4x_1(1 - x_1)$$

som er 0 hvis og bare hvis $x_1 = 0$ eller $x_1 = 1$. Videre, dersom vi setter $x_2 = 1$, blir første ligning

$$4x_1(1 - x_1) - 2x_1 = 2x_1 - 4x_1^2 = 2x_1(1 - 2x_1)$$

som er 0 hvis og bare hvis $x_1 = 0$ eller $x_1 = 1/2$. Vi får altså at $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$ og $(1/2, 1)$ er likevektspunktene til dette systemet.

Vi fortsetter med å regne ut den deriverte (vi betegner igjen høyresiden med $f(x_1, x_2)$:

$$Df(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 4 - 8x_1 - 2x_2 & -2x_1 \\ 0 & 1 - 2x_2 \end{bmatrix}$$

Igjen ser vi at et av elementene utenfor diagonalen er 0, noe som gjør at egenverdiene kan leses direkte ut fra diagonalen til matrisen. Vi har

$$Df(0, 0) = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Vi har altså to positive (og reelle) egenverdier, som betyr at dette er en ustabil node.

Videre blir

$$Df(1, 0) = \begin{bmatrix} -4 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

så $(1, 0)$ er altså et sadelpunkt (ustabilt).

I punktet $(0, 1)$ får vi

$$Df(0, 1) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

og igjen har vi altså en positiv og en negativ egenverdi, og dermed er $(0, 1)$ et sadelpunkt.

Til slutt får vi

$$Df(1/2, 1) = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

og dermed er begge egenverdiene negative, så $(1/2, 1)$ er en stabil node. □

Eksamen 2008H, 1 **a)** I en bestemt populasjon av ewoker antas ingen individer å leve mer enn 40 år. Populasjonen deles opp i 4 kategorier etter hvilket tiår individet er i. Dvs kategori en inntil 10 år, kategori 2 fra og med 10 år inntil 20 år og så videre.

For ewokene i 1. alderskategori forventes det at 30% får i gjennomsnitt 2 avkom hver, mens i andre alderskategori forventes halvparten å få i gjennomsnitt 7 avkom hver. Individer i 3. alderskategori får 2 avkom i snitt, mens de eldste ewokene får 0.5 barn i gjennomsnitt.

Av individer i 1. alderskategori blir 15% spist og 15% dør av andre årsaker. I 2. alderskategori er tilsvarende tall henholdsvis 5% og 10%. I 3.aldersklasse dør 10%. Sett opp en Leslie-matrise som beskriver denne populasjonens utvikling.

Løsning: Vi lar $N_1(t)$, $N_2(t)$, $N_3(t)$ og $N_4(t)$ betegne antall individer i hver alderskategori. Fra opplysningene om antall avkom følger det at

$$\begin{aligned} N_1(t+1) &= 0.3 \cdot 2 \cdot N_1(t) + 0.5 \cdot 7 \cdot N_2(t) + 2 \cdot N_3(t) + 0.5 \cdot N_4(t) \\ &= 0.6N_1(t) + 3.5N_2(t) + 2N_3(t) + 0.5N_4(t) \end{aligned}$$

Videre blir

$$N_2(t+1) = 0.7 \cdot N_1(t)$$

og

$$N_3(t+1) = 0.85 \cdot N_2(t)$$

og til slutt

$$N_4(t+1) = 0.9 \cdot N_3(t)$$

som også kan skrives

$$\begin{bmatrix} N_1(t+1) \\ N_2(t+1) \\ N_3(t+1) \\ N_4(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.6 & 3.5 & 2 & 0.5 \\ 0.7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.85 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.9 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1(t) \\ N_2(t) \\ N_3(t) \\ N_4(t) \end{bmatrix}$$

4×4-matrisen på høyre side er Leslie-matrisen vi skulle finne. (Tiden måles her i tiår). $\square$

b) Start i "år 0" med en populasjon bestående av 200 ewoker i første aldersklasse, og ingen eldre individer. Det trengs 500 voksne ewoker (dvs aldersklasse 2,3, og 4) for å nedkjempe et forsterket kompani med stormtropper. Etter denne modellen, hvor mange tiår tar det før denne populasjonen er stor nok til å greie dette?

Løsning: La oss skrive $\mathbf{N}(t) = \begin{bmatrix} N_1(t) & N_2(t) & N_3(t) & N_4(t) \end{bmatrix}'$. Vi har

$$\mathbf{N}(0) = \begin{bmatrix} 200 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dermed blir

$$\mathbf{N}(1) = \begin{bmatrix} 0.6 & 3.5 & 2 & 0.5 \\ 0.7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.85 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.9 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 200 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 120 \\ 140 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

□

Vi har $140 < 500$, så vi fortsetter:

$$\mathbf{N}(2) = \begin{bmatrix} 562 \\ 84 \\ 119 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Tilsvarende er $84 + 119 < 500$, så vi fortsetter:

$$\mathbf{N}(3) = \begin{bmatrix} 869 \\ 393 \\ 101 \\ 107 \end{bmatrix}$$

Siden $393 + 101 + 107 > 500$, betyr det at det tar 3 tiår før populasjonen kan nedkjempe et kompani med stormtropper.

Eksamen Mai 2002, oppg 2 Regn ut

$$\int x(x+1)^6 \mathrm{d}x$$
$$\int_0^{2\pi} x \sin(x^2) \mathrm{d}x$$

Løsning: Det første integralet kan løses både ved hjelp av substitusjon og delvis integrasjon. Dersom vi setter $u = x + 1$, får vi $x = u - 1$, og dermed blir

$$\begin{aligned} \int x(x+1)^6 \mathrm{d}x &= \int (u-1)u^6 \mathrm{d}u = \int u^7 - u^6 \mathrm{d}u = \frac{1}{8}u^8 - \frac{1}{7}u^7 + C \\ &= \frac{(x+1)^8}{8} - \frac{(x+1)^7}{7} + C \end{aligned}$$

Vi kan også bruke delvis integrasjon med $u = x$ og $v' = (x+1)^6$. Da følger det at $u' = 1$ og

$$v = \int (x+1)^6 \mathrm{d}x = \frac{(x+1)^7}{7} + C$$

(Vi velger $C = 0$). Det gir

$$\begin{aligned} \int x(x+1)^6 \mathrm{d}x &= \frac{x(x+1)^7}{7} - \frac{1}{7}\int (x+1)^7 \mathrm{d}x = \frac{x(x+1)^7}{7} - \frac{1}{7} \cdot \frac{(x+1)^8}{8} + C \\ &= \frac{(x+1)^7}{7}\left(x - \frac{(x+1)}{8}\right) + C \end{aligned}$$

Det er ikke helt opplagt at de to svarene er like. La oss skrive om det første uttrykket:

$$\begin{aligned}\frac{(x+1)^8}{8} - \frac{(x+1)^7}{7} &= \frac{7(x+1)^8}{7\cdot 8} - \frac{(x+1)^7}{7} \\ &= \frac{(x+1)^7}{7}\left(\frac{7(x+1)}{8} - 1\right) = \frac{(x+1)^7}{7}\left(\frac{7x}{8} - \frac{1}{8}\right) \\ &= \frac{(x+1)^7}{7}\left(x - \frac{x}{8} - \frac{1}{8}\right) \\ &= \frac{(x+1)^7}{7}\left(x - \frac{(x+1)}{8}\right)\end{aligned}$$

som viser at svarene stemmer overens.

For det andre integralet bruker vi substitusjon; vi kjenner igjen sammensetningen $\sin(x^2)$, samt x, som er en konstant faktor unna å være den deriverte til x^2. Vi setter altså $u = x^2$, som gir $\mathrm{d}u = 2x\mathrm{d}x$ eller $\mathrm{d}x = \mathrm{d}u/2$, og dermed blir

$$\int x\sin x^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \sin u \mathrm{d}u = -\frac{1}{2}\cos u + C = -\frac{1}{2}\cos x^2 + C$$

Det bestemte integralet blir dermed

$$\int_0^{2\pi} x\sin x^2 \mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{2}\cos x^2\right]_0^{2\pi} = -\frac{1}{2}\cos 4\pi^2 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\left(1 - \cos 4\pi^2\right)$$

□

Eksamen Mai 2002, oppgave 5 Betrakt funksjonen

$$f(x,y) = ye^x$$

a) Finn gradienten til $f(x,y)$.

Løsning: Vi har

$$\nabla f(x,y) = \begin{bmatrix} ye^x \\ e^x \end{bmatrix}$$

□

b) Finn tangentplanet til $f(x,y)$ i punktet $(0,1)$.

Løsning: Tangentplanet har ligning

$$z - z_0 = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)$$

Vi har $x_0 = 0$, $y_0 = 1$ og $z_0 = f(x_0,y_0) = 1$, og

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,1) = 1, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(0,1) = 1$$

så tangentplanet har ligning

$$z - 1 = x + (y-1)$$

eller $z = x + y$. □

c) Finn eventuelle ekstrempunkter til $f(x,y)$ under bibetingelsen

$$x^2 + y^2 = 1$$

Løsning: For å løse denne oppgaven, bruker vi Lagrange's multiplikatormetode. Vi skriver

$$g(x,y) = x^2 + y^2 - 1$$

og har dermed at

$$\nabla g(x,y) = \begin{bmatrix} 2x \\ 2y \end{bmatrix}$$

Vi må løse ligningen $\nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y)$ for (x,y),altså

$$\begin{aligned} ye^x &= 2\lambda x \\ e^x &= 2\lambda y \end{aligned}$$

Vi eliminerer λ ved å gange første ligning med y og andre ligning med x (slik at høyresidene blir like), som gir

$$y^2 e^x - xe^x = e^x(y^2 - x) = 0$$

Siden $e^x \neq 0$ for alle x, må vi ha $y^2 - x = 0$ eller $y^2 = x$. Samtidig skal vi også ha $x^2 + y^2 = 1$, og vi kan sette $y^2 = x$ inn i denne ligningen. Det gir

$$x^2 + x = 1$$

som har løsninger

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Siden $y^2 = x$, vil kun den positive roten gi opphav til en verdi for y, så

$$y = \pm\sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}$$

Vi har altså to kandidatpunkter, nemlig

$$P_1 = \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \sqrt{\frac{-1\ +\sqrt{5}}{2}} \right), \qquad \text{og} \qquad P_2 = \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, -\sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}} \right)$$

Bibetingelseskurven er lukket og begrenset (en sirkel) og vi er dermed garantert et maksimum og et minimum. Siden $e^x > 0$ for alle x, er fortegnet til $f(x,y)$ det samme som fortegnet til y. Det er dermed opplagt at P_1 er et globalt maksimum for $f(x,y)$ langs kurven $g(x,y) = 0$, og at P_2 er et globalt minimum for $f(x,y)$ langs kurven $g(x,y) = 0$. □

Tillegg Skriv ned den generelle løsningen til systemet

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = A\mathbf{x}$$

der

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 9/2 \\ -1/2 & 2 \end{bmatrix}$$

Løsning: Vi har $\operatorname{tr} A = 4$ og $\det A = 4 + 9/4 = 25/4$. Egenverdiene oppfyller dermed ligningen

$$\det(A - \lambda I) = \lambda^2 - 4\lambda + \frac{25}{4} = 0$$

som har løsninger

$$\lambda = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 25/4}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{-9}}{2} = 2 \pm \frac{3i}{2}$$

Dette er altså komplekskonjugerte egenverdier. Vi skriver $\lambda = 2 + 3i/2$. Fra notatet har vi dermed at den generelle løsningen er gitt ved

$$\mathbf{x}(t) = c_1 e^{at}(\mathbf{u}\cos bt - \mathbf{v}\sin bt) + c_2 e^{at}(\mathbf{u}\sin bt + \mathbf{v}\cos bt)$$

der c_1, c_2 er konstanter, $a = \operatorname{Re}\lambda$ og $b = \operatorname{Im}\lambda$ og $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ er henholdsvis realdel og imaginærdel for en tilhørende (kompleks) egenvektor. Vi fortsetter dermed med å finne en egenvektor tilhørende egenverdien $\lambda = 2 + 3i/2$:

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 2 - (2 + 3i/2) & 9/2 \\ -1/2 & 2 - (2 + 3i/2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3i/2 & 9/2 \\ -1/2 & -3i/2 \end{bmatrix}$$

Vi multipliserer andre rad med $3i$, som gir

$$\begin{bmatrix} -3i/2 & 9/2 \\ -3i/2 & 9/2 \end{bmatrix}$$

siden $(-3i/2) \cdot 3i = -9 \cdot i^2/2 = -9 \cdot (-1)/2 = 9/2$. Dermed reduserer ligningssystemet $(A - \lambda I)\mathbf{w} = \mathbf{0}$ seg til ligningen $-(3i/2)w_1 + (9/2)w_2 = 0$ eller $-iw_1 + 3w_2 = 0$, og vi kan velge $w_1 = 3$ og $w_2 = i$ (der $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} w_1 & w_2 \end{bmatrix}'$. Det gir

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 3 \\ i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{u} + i\mathbf{v}$$

Det betyr at den generelle løsningen er gitt ved

$$\mathbf{x}(t) = c_1 e^{2t} \left(\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} \cos(3t/2) - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \sin(3t/2) \right) + c_2 e^{2t} \left(\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} \sin(3t/2) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cos(3t/2) \right)$$

□