Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

MA0002 Brukerkurs i matematikk B
Vår 2013

Løsningsforslag — Øving 2

7.3.5 Skriv ned delbrøkoppspaltingen til funksjonen

$$f(x) = \frac{2x-3}{x(x+1)}$$

Løsning: Nevneren har to distinkte førstegradsfaktorer, og delbrøkoppspaltingen vil dermed ha følgende form:

$$\frac{2x-3}{x(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1}$$

Det følger at

$$2x-3 = A(x+1) + Bx = (A+B)x + A$$

slik at konstantene A og B må oppfylle $A+B = 2$ og $A = -3$. Dermed blir $B = 5$, så

$$\frac{2x-3}{x(x+1)} = \frac{-3}{x} + \frac{5}{x+1}$$

□

Tillegg Skriv ned delbrøkoppspaltingen til uttrykket

$$\frac{x}{x^2+4x+4}$$

Løsning: Vi ser at nevneren kan faktoriseres ytterligere (enten direkte eller ved bruk av formelen for løsning av andregradsligninger), nemlig

$$\frac{x}{x^2+4x+4} = \frac{x}{(x+2)^2}$$

og vi har dermed en delbrøkoppspalting på formen

$$\frac{x}{(x+2)^2} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{(x+2)^2}$$

og det følger at

$$x = A(x+2) + B = Ax + 2A + B.$$

Dermed er $A = 1$ og $2A + B = 0$, så $B = -2$, så vi kan skrive

$$\frac{x}{(x+2)^2} = \frac{1}{x+2} - \frac{2}{(x+2)^2}$$

□

$\boxed{7.3.13}$ Bruk delbrøkoppspalting til å regne ut integralet

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x(x-2)}$$

Løsning: Integranden består av to distinkte førstegradsfaktorer, og vi vil dermed ha en delbrøkoppspalting på formen

$$\frac{1}{x(x-2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2}$$

Det følger at

$$1 = A(x-2) + Bx = (A+B)x - 2A$$

slik at $A + B = 0$ og $-2A = 1$. Altså er $A = -1/2$ og $B = 1/2$, og vi kan skrive

$$\frac{1}{x(x-2)} = \frac{-1}{2x} + \frac{1}{2(x-2)}$$

Dermed blir integralet

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x(x-2)} = \frac{-1}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{x} + \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{x-2} = \frac{-\ln|x| + \ln|x-2|}{2} + C$$

□

$\boxed{7.3.23}$ Dann et fullstendig kvadrat i nevneren og regn ut integralet

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2 - 2x + 2}$$

Løsning: Vi skal altså skrive $x^2 - 2x + 2 = (x+a)^2 + b$ for passende verdier av a og b. La oss først merke oss at $(x+a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$, slik at $-2 = 2a$ eller $a = -1$. Siden $a^2 = 1$, så må $b = 1$. Det betyr at $x^2 - 2x + 2 = (x-1)^2 + 1$, og dermed blir

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2 - 2x + 2} = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x-1)^2 + 1}$$

For å håndtere integralet på høyresiden, bruker vi substitusjonen $u = x - 1$, som gir $\mathrm{d}u = \mathrm{d}x$ og dermed at

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-1)^2+1} = \int \frac{\mathrm{d}u}{u^2+1} = \tan^{-1} u + C = \tan^{-1}(x-1) + C$$

□

$\boxed{7.3.28}$ Regn ut integralet

$$\int \frac{2x-1}{(x+4)(x+1)}\,\mathrm{d}x$$

Løsning: Vi bruker (nok en gang) delbrøkoppspalting på integranden; vi har

$$\frac{2x-1}{(x+4)(x+1)} = \frac{A}{x+4} + \frac{B}{x+1}$$

og vi ender opp med at

$$2x - 1 = A(x+1) + B(x+4) = (A+B)x + A + 4B$$

slik at $A + B = 2$ og $A + 4B = -1$. Det gir $A = 2 - B$ og dermed

$$A + 4B = (2 - B) + 4B = 2 + 3B = -1,$$

eller $3B = -3 \Rightarrow B = -1$. Da er $A = 2 - B = 3$, og integralet kan skrives

$$\int \frac{2x-1}{(x+4)(x+1)}\,\mathrm{d}x = 3\int \frac{\mathrm{d}x}{x+4} - \int \frac{\mathrm{d}x}{x+1} = 3\ln|x+4| - \ln|x+1| + C$$

□

$\boxed{7.3.45}$ Regn ut integralet

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)^2 x}$$

Løsning: Igjen bruker vi delbrøkoppspalting; nevneren til integranden består her av faktorene $x + 1$ og x, der $x + 1$ inngår to ganger. Vi får dermed en delbrøkoppspalting på formen

$$\frac{1}{(x+1)^2 x} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{x}$$

og det følger at

$$\begin{aligned} 1 &= Ax(x+1) + Bx + C(x+1)^2 = Ax^2 + Ax + Bx + C(x^2 + 2x + 1) \\ &= (A+C)x^2 + (A+B+2C)x + C \end{aligned}$$

som gir $C = 1$, $A + C = 0$, altså $A = -1$ og $A + B + 2C = 0$ som gir oss $B = -1$. Dermed splittes integralet opp i

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)^2 x} = -\int \frac{\mathrm{d}x}{x+1} - \int \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)^2} + \int \frac{\mathrm{d}x}{x}$$

Det midterste integralet regnes ut ved substitusjonen $u = x + 1$ og potensregelen for integrasjon:

$$-\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)^2} = -\int \frac{\mathrm{d}u}{u^2} = -(-\frac{1}{u}) + C = \frac{1}{x+1} + C$$

Det gir:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)^2} = -\ln|x+1| + \frac{1}{x+1} + \ln|x| + C = \ln\left|\frac{x}{x+1}\right| + \frac{1}{x+1} + C$$

□

$\boxed{8.1.1}$ Løs ligningen

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x + \sin x,$$

der $y(0) = 0$.

Løsning: Ligningen er ekvivalent med at

$$y(x) = \int x + \sin x \,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} - \cos x + C$$

Vi har at

$$y(0) = -1 + C$$

så $C = 1$. Altså er løsningen som oppfyller initialverdiproblemet gitt ved

$$y(x) = \frac{x^2}{2} - \cos x + 1$$

□

$\boxed{8.1.10}$ Anta at mengden fosfor i en innsjø ved tid t, $P(t)$, oppfyller ligningen

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} = 3t + 1,$$

med $P(0) = 0$. Hvor mye fosfor er det i innsjøen ved tid $t = 10$?

Løsning: Vi har

$$P(t) = \int 3t + 1 \, \mathrm{d}t = \frac{3}{2}t^2 + t + C$$

og betingelsen $P(0) = 0$ gir $C = 0$. Dermed er

$$P(t) = \frac{3}{2}t^2 + t$$

og vi finner at

$$P(10) = \frac{3}{2}10^2 + 10 = \frac{300}{2} + 10 = 160$$

□

$\boxed{8.1.15}$ Løs det autonome initialverdiproblemet

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}s} = 2h + 1, \qquad h(0) = 4$$

Løsning: Separasjon av variabler gir

$$\int \frac{\mathrm{d}h}{2h+1} = \int \mathrm{d}s$$

og substitusjonen $u = 2h + 1$ (som gir $\mathrm{d}u = 2\mathrm{d}h$) gir

$$\int \frac{\mathrm{d}h}{2h+1} = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}u}{u} = \frac{\ln|u|}{2} + C = \frac{\ln|2h+1|}{2} + C$$

og vi har dermed at

$$\begin{aligned}
\frac{\ln|2h+1|}{2} &= s + C \\
\ln|2h+1| &= 2s + C \\
|2h+1| &= e^C e^{2s} \\
2h + 1 &= (\pm e^C)e^{2s} \\
2h &= (\pm e^C)e^{2s} - 1 = ke^{2s} - 1, \qquad k \neq 0 \\
h &= \frac{ke^{2s} - 1}{2}
\end{aligned}$$

Siden $h(0) = (k-1)/2 = 4$ følger det fra initialbetingelsen at $k = 9$. Løsningen er dermed gitt ved

$$h(s) = \frac{9e^{2s} - 1}{2}$$

□

8.1.21 Anta at en populasjon, hvis størrelse ved tid t, som vi betegner med $N(t)$, oppfyller ligningen

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{100}N^2, \qquad N(0) = 10 \tag{1}$$

a) Løs (1).

Løsning: Separasjon av variabler gir

$$\int \frac{\mathrm{d}N}{N^2} = -\frac{1}{N} = \frac{1}{100}\int \mathrm{d}t = \frac{t}{100} + C$$

altså

$$\begin{aligned}\frac{1}{N} &= \frac{-t}{100} + C \\ N &= \frac{1}{C - \frac{t}{100}}\end{aligned}$$

Siden

$$N(0) = \frac{1}{C} = 10$$

får vi $C = 1/10$, og løsningen av initialverdiproblemet blir

$$N(t) = \frac{1}{\frac{1}{10} - \frac{t}{100}} = \frac{1}{\frac{10-t}{100}} = \frac{100}{10-t}$$

□

b) Tegn grafen til $N(t)$ for $0 \leq t \leq 10$. Hva skjer når $t \to 10$? Forklar med ord hva dette betyr.

Løsning: Grafen er tegnet på figur 1. Vi ser tydelig at

$$\lim_{t\to 10^-} N(t) = \infty$$

både fra grafen og uttrykket for $N(t)$ over, som betyr at populasjonen eksploderer.
□

8.1.29 Bruk delbrøkoppspalting til å løse

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2y(3-y)$$

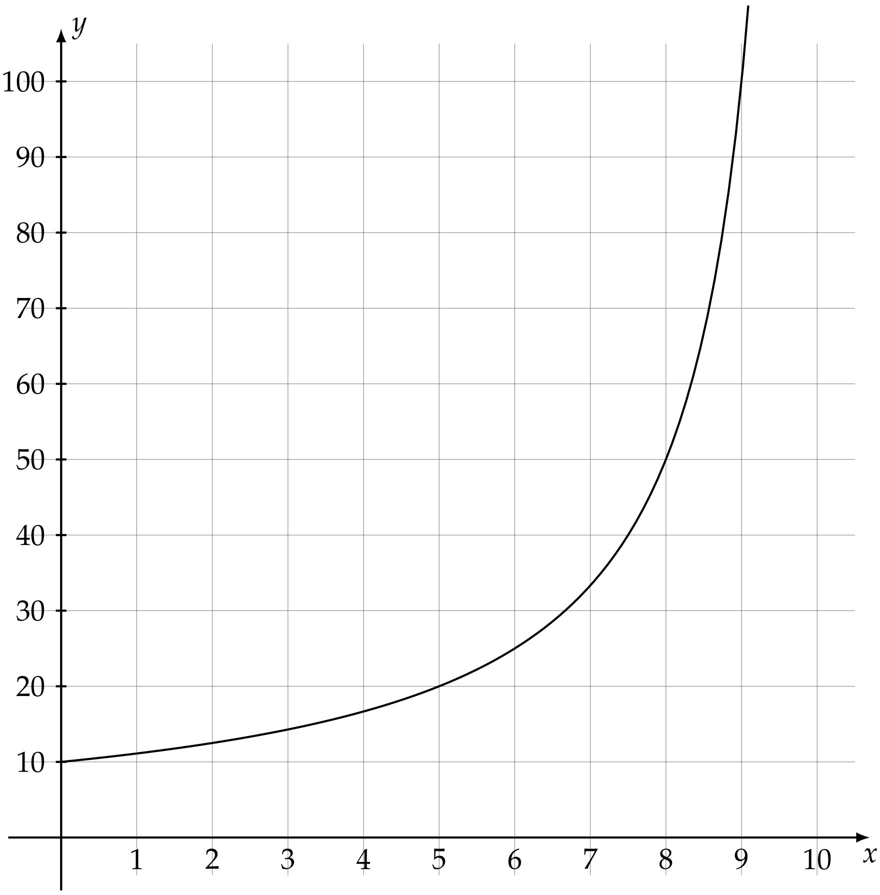
der $y(1) = 5$.

Løsning: Separasjon av variabler gir

$$\frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}y}{y(3-y)} = \int \mathrm{d}x$$

og vi løser integralet til venstre ved delbrøkoppspalting:

$$\frac{1}{y(3-y)} = \frac{A}{y} + \frac{B}{3-y}$$



Figur 1: Løsningen av initialverdiproblemet (1)

og det følger at

$$1 = A(3 - y) + By = 3A + (B - A)y.$$

Altså er $3A = 1$ og $B = A$, som gir $A = B = 1/3$. Det gir

$$\frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}y}{y(3-y)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\int \frac{\mathrm{d}y}{y} + \frac{1}{3}\int \frac{\mathrm{d}y}{3-y}\right) = \frac{\ln|y| - \ln|3-y|}{6} = \frac{1}{6}\ln\left|\frac{y}{3-y}\right|$$

(Det negative fortegnet foran $\ln|3-y|$ kommer fra substitusjonen $u = 3 - y$ som gir $\mathrm{d}u = -\mathrm{d}y$). Det gir

$$\begin{aligned}
\ln\left|\frac{y}{3-y}\right| &= 6x + C \\
\left|\frac{y}{3-y}\right| &= e^{C}e^{6x} \\
\frac{y}{3-y} &= (\pm e^{C})e^{6x} = ke^{6x}, \qquad k \neq 0 \\
y &= ke^{6x}(3-y) = 3ke^{6x} - yke^{6x} \\
y(1 + ke^{6x}) &= 3ke^{6x} \\
y &= \frac{3ke^{6x}}{1+ke^{6x}} = \frac{3}{k^{-1}e^{-6x}+1}
\end{aligned}$$

For å bestemme verdien av konstanten k, er det enklest å gjøre bruk av ligningen

$$\frac{y}{3-y} = ke^{6x}$$

fra over. Dersom vi setter inn $y(1) = 5$ får vi

$$\frac{5}{3-5} = \frac{-5}{2} = ke^{6\cdot 1}$$

som gir

$$k = \frac{-5}{2e^6}$$

altså er

$$k^{-1} = -\frac{2}{5}e^6$$

og funksjonen kan skrives

$$y(x) = \frac{3}{1 - \frac{2}{5}e^6 e^{-6x}} = \frac{3}{1 - \frac{2}{5}e^{-6(x-1)}}$$

□

$\boxed{\text{8.1.47}}$ Løs initialverdiproblemet

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = (y+1)e^{-x}, \qquad y(0) = 2$$

Løsning: Separasjon av variabler gir

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y+1} = \int e^{-x}\,\mathrm{d}x$$

altså

$$\begin{aligned}
\ln|y+1| &= \int e^{-x}\,\mathrm{d}x = -e^{-x} + C \\
|y+1| &= e^{C}e^{-e^{-x}} \\
y+1 &= (\pm e^{C})e^{-e^{-x}} = ke^{-e^{-x}}, \qquad k \neq 0 \\
y &= ke^{-e^{-x}} - 1
\end{aligned}$$

Vi har at

$$y(0) = ke^{-e^{0}} - 1 = ke^{-1} - 1 = 2$$

som gir $ke^{-1} = 3$, altså $k = 3e$. Dermed kan løsningen på initialverdiproblemet skrives

$$y(x) = -1 + 3ee^{-e^{-x}} = -1 + 3e^{1-e^{-x}}$$

□