MA0002 Brukerkurs i matematikk B
Vår 2013

Løsningsforslag — Øving 3

$\boxed{8.2.1}$ Anta at

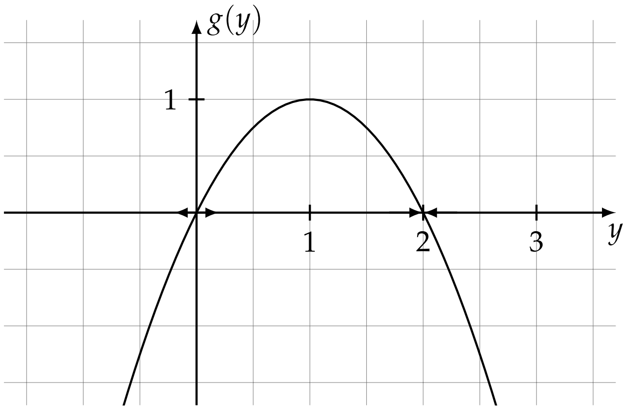
$$\frac{dy}{dx} = y(2-y)$$

a) Finn likevektspunktene til denne differensialligningen.

Løsning: Det er lett å se at $dy/dx = 0$ hvis og bare hvis $y = 0$ eller $y = 2$, så dette er likvektspunktene til differensialligningen. □

b) Tegn grafen til dy/dx som funksjon av y, og bruk grafen til å drøfte stabiliteten til likevektspunktene.

Løsning: Grafen er tegnet på figur 1. Vi ser at $dy/dx < 0$ like før likevektspunktet $y = 0$, og motsatt like etter. Det betyr at en løsning $y(x)$ vil avta som funksjon av x før likevektspunktet (og dermed bevege seg vekk fra likevektspunktet), og vokse som funksjon av x etter likevektspunktet (igjen beveger løsningen seg vekk fra likevektspunktet), og likevektspunktet er dermed *ustabilt*. Et tilsvarende resonnement tilsier at likevektspunktet $y = 2$ er *(lokalt) stabilt*. □



Figur 1: Grafen til $g(y) = y(2-y)$

c) Regn ut egenverdiene tilhørende hvert likevektspunkt, og drøft stabiliteten til likevektspunktene.

Løsning: Vi deriverer $g(y) = y(2-y) = 2y - y^2$, som gir $g'(y) = 2 - 2y$ og egenverdiene blir $g'(0) = 2 > 0$ og $g'(2) = 2 - 4 = -2 < 0$. Det følger (igjen) at $y = 0$ er ustabilt og at $y = 2$ er stabilt. □

$\boxed{8.2.6}$ Anta at $N(t)$ angir størrelsen til en populasjon ved tid t. Populasjonen utvikler seg i henhold til den logistiske ligningen, men, i tillegg vil rovdyr bidra til en reduksjon i størrelsen, slik at veksthastigheten er gitt ved

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = N\left(1 - \frac{N}{50}\right) - \frac{9N}{5+N} \tag{1}$$

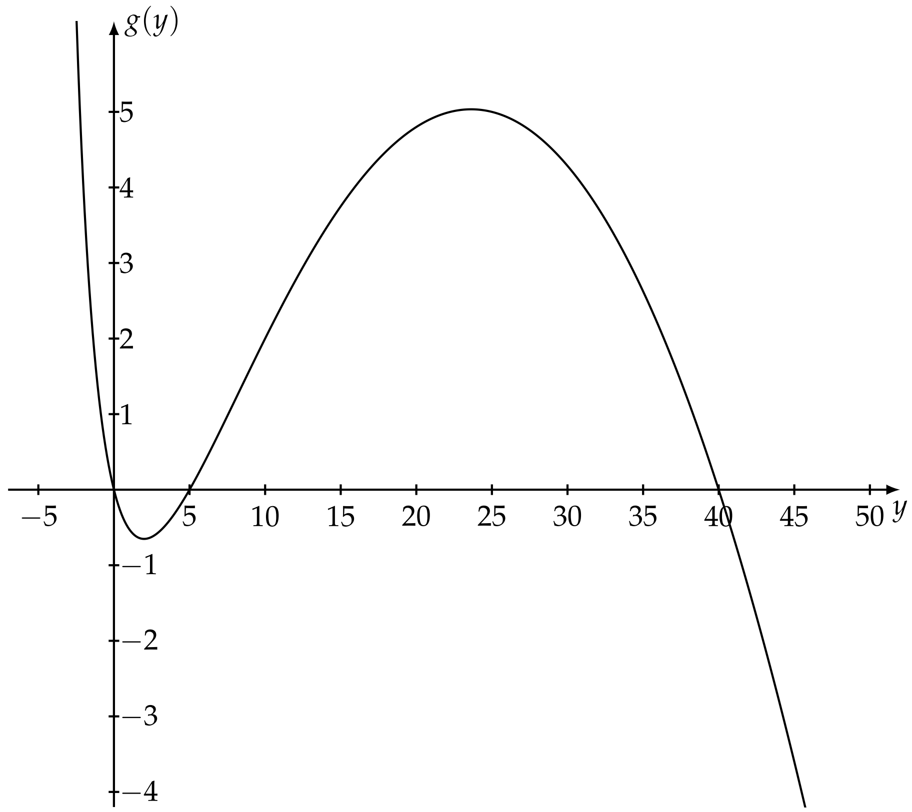
Det første leddet beskriver logistisk vekst, mens det andre er reduksjonen som følge av rovdyr.

a) La

$$g(N) = N\left(1 - \frac{N}{50}\right) - \frac{9N}{5+N}$$

og tegn grafen til $g(N)$.

Løsning: Grafen er vist på figur 2 under. □



Figur 2: Grafen til $g(N)$ (oppgave 8.2.6).

b) Finn alle likevektspunktene til ligning (1).

Løsning: Vi må altså løse ligningen

$$N\left(1 - \frac{N}{50}\right) - \frac{9N}{5+N} = 0 \tag{2}$$

for N. Multiplikasjon med $5 + N$ gir (etter litt regning)

$$\begin{aligned} N(5+N)\left(1-\frac{N}{50}\right) - 9N &= 0 \\ -\frac{N^3}{50} + \frac{9N^2}{10} - 4N &= 0 \\ \frac{-N}{50}\left(N^2 - 45N + 200\right) &= 0 \end{aligned}$$

slik at vi enten må ha $N = 0$ eller

$$N^2 - 45N + 200 = 0$$

Sistnevnte kan løses ved hjelp av formelen for løsning av andregradsligninger, som gir

$$N = \frac{45 \pm \sqrt{45^2 - 4 \cdot 200}}{2} = \frac{45 \pm 35}{2}$$

Løsningene blir dermed $N = 40$ og $N = 5$, i tillegg til $N = 0$. Dette ser rimelig ut utifra grafen. □

c) Bruk grafen til $g(N)$ fra **(a)** til å avgjøre om hvert likevektspunkt er stabilt eller ustabilt.

Løsning: Vi ser at $N = 0$ og $N = 40$ er stabile (funksjonen er positiv før og negativ etter, altså er enhver løsningen voksende som funksjon av x før og avtagende etter hvert likevektspunkt, og vil dermed nærme seg likevektspunktet igjen), mens $N = 5$ er ustabilt. □

d) Bruk egenverdier til å avgjøre stabilitet/ustabilitet for hvert likevektspunkt.

Løsning: Litt omskrevet er

$$g(N) = N - \frac{N^2}{50} - \frac{9N}{5+N}$$

Siden

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}N}\frac{9N}{5+N} = \frac{9(5+N) - 9N}{(5+N)^2} = \frac{45}{(5+N)^2}$$

blir

$$g'(N) = 1 - \frac{2N}{50} - \frac{45}{(5+N)^2}.$$

Vi har at

$$\begin{aligned} g'(0) &= 1 - \frac{45}{5^2} = 1 - \frac{45}{25} < 0 \\ g'(5) &= 1 - \frac{10}{50} - \frac{45}{10^2} = \frac{100 - 20 - 45}{100} > 0 \\ g'(40) &= 1 - \frac{80}{50} - \frac{45}{45^2} < 0 \end{aligned}$$

(Vi behøver ikke å regne ut de eksakte verdiene her, det er tilstrekkelig å bestemme fortegnet). Dette bekrefter det vi fant i **(c)** over. □

$\boxed{1}$ Løs differensialligningen

$$x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + y = e^x$$

Løsning: Vi skriver om ligningen ved å dividere med x på begge sider, som gir

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \frac{1}{x}y = \frac{e^x}{x}$$

Vi har altså å gjøre med en førsteordens lineær differensialligning med $P(x) = 1/x$ og $Q(x) = e^x/x$ (med samme notasjon som i notatet). En antiderivert til $P(x)$ er $\ln x$, og vi multipliserer derfor hele ligningen med $e^{\ln x} = x$ som er en integrerende faktor

$$x\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \frac{1}{x}y\right) = x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + y = x\frac{e^x}{x} = e^x$$

Siden

$$x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + y = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(xy),$$

(for å sjekke at dette stemmer, regn ut høyre side av ligningen) så kan ligningen skrives om til

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(xy) = e^x,$$

og antiderivasjon av begge sider gir

$$xy = \int e^x \,\mathrm{d}x = e^x + C.$$

Vi konkluderer at

$$y = \frac{e^x}{x} + \frac{C}{x}$$

er den generelle løsningen til ligningen. $\square$

$\boxed{4}$ Betrakt ligningen

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - xy = 0 \tag{3}$$

a) Løs ligning (3) med metoden fra notatet.

Løsning: Ligning (3) er en lineær førsteordens differensialligning med $P(x) = -x$. En antiderivert til $P(x)$ er $-x^2/2$, og en integrerende faktor blir dermed $e^{-x^2/2}$. Multiplikasjon med $e^{-x^2/2}$ på begge sider av ligning (3) gir

$$e^{-x^2/2}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - xe^{-x^2/2}y = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(e^{-x^2/2}y\right) = 0$$

og dermed blir (ved antiderivasjon av begge sider)

$$e^{-x^2/2}y = C \qquad \Rightarrow \qquad y = Ce^{x^2/2}.$$

der C er en vilkårlig konstant. $\square$

b) Løs ligning (3) ved separasjon av variabler.

Løsning: En enkel omskriving av (3) gir

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = xy$$

som er en separabel differensialligning. Separasjon av variabler gir

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = \int x \,\mathrm{d}x$$

som gir

$$\begin{aligned} \ln|y| &= \frac{x^2}{2} + K \\ |y| &= e^{x^2/2+K} = e^K e^{x^2/2} \\ y &= \pm e^K e^{x^2/2} = Ce^{x^2/2} \end{aligned}$$

Her blir C en vilkårlig konstant $\neq 0$, men divisjon med y gjorde at vi mistet den konstante løsningen $y \equiv 0$. Denne løsningen svarer til $C = 0$. □

$\boxed{9.1.1}$ Løs ligningssystemet

$$\begin{aligned} x - y &= 1 \\ x - 2y &= -2 \end{aligned}$$

Tegn linjene som hver ligning representerer i samme koordinatsystem, og bruk dette til å forklare løsningen.

Løsning: Den første ligningen gir $y = x - 1$, og innsetting i den andre ligningen gir

$$\begin{aligned} x - 2(x-1) &= -2 \\ x - 2x + 2 &= -2 \\ -x &= -4 \\ x &= 4 \end{aligned}$$

og dermed blir $y = x - 1 = 4 - 1 = 3$. Ligningen for den første linjen er $y = x - 1$ (altså en linje med stigningstall 1, som skjærer y-aksen i $y = -1$), mens ligningen for den andre linjen blir $y = x/2 + 1$ (altså en linje med stigningstall $1/2$, som skjærer y-aksen i $y = 1$). Dette er altså to ikke-parallelle linjer, som vi vet alltid vil skjære hverandre i nøyaktig ett punkt. □

$\boxed{9.1.5}$ Bestem c slik at

$$\begin{aligned} 2x - 3y &= 5 \\ 4x - 6y &= c, \end{aligned}$$

har **(a)** uendelig mange løsninger og **(b)** ingen løsninger. **(c)** Er det mulig å velge c slik at systemet har *nøyaktig* en løsning. Forklar.

Løsning: Den første ligningen gir at $2x = 5 + 3y$, som innsatt i den andre ligningen gir

$$\begin{aligned} 2(5+3y) - 6y &= c \\ 10 + 6y - 6y &= c \\ 10 &= c \end{aligned}$$

Den siste ligningen er altså oppfyllt hvis og bare hvis $c = 10$ (en enklere måte å se dette på er å merke seg at den andre ligningen simpelthen er 2 ganger den første, og da må selvsagt høyresiden til den andre ligningen også være 2 ganger høyresiden til den første). Det betyr at dersom $c = 10$, så kan vi velge f.eks x fritt og regne ut y ved formelen (som er funnet ved å løse den første ligningen for y)

$$y = 2x - 5$$

Det betyr at vi har uendelig mange løsninger (ethvert punkt på linjen $y = 2x - 5$ er en løsning). Dersom $c \neq 10$ er systemet inkonsistent, og har dermed ingen løsninger. Dette betyr også at det ikke er mulig å velge c slik at systemet har nøyaktig en løsning (c er enten lik 10 eller ikke lik 10). $\square$

$\boxed{\text{9.1.25}}$ Finn den utvidede koeffisientmatrisen til systemet

$$\begin{aligned} -x - 2y + 3x &= -9 \\ 2x + y - z &= 5 \\ 4x - 3y + 5z &= -9 \end{aligned}$$

og bruk denne til å løse ligningssystemet.

Løsning: Den utvidede koeffisientmatrisen blir

$$\left[\begin{array}{rrr|r} -1 & -2 & 3 & -9 \\ 2 & 1 & -1 & 5 \\ 4 & -3 & 5 & -9 \end{array}\right]$$

Vi omformer systemet til trappeform

$$\left[\begin{array}{rrr|r} -1 & -2 & 3 & -9 \\ 2 & 1 & -1 & 5 \\ 4 & -3 & 5 & -9 \end{array}\right] \underset{R_3+4R_1}{\overset{R_2+2R_1}{\Longrightarrow}} \left[\begin{array}{rrr|r} -1 & -2 & 3 & -9 \\ 0 & -3 & 5 & -13 \\ 0 & -11 & 17 & -45 \end{array}\right] \underset{3R_3}{\overset{(-11)R_2}{\Longrightarrow}}$$

$$\left[\begin{array}{rrr|r} -1 & -2 & 3 & -9 \\ 0 & 33 & -55 & 143 \\ 0 & -33 & 51 & -135 \end{array}\right] \underset{(-1)R_1}{\overset{R_3+R_2}{\Longrightarrow}} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -3 & 9 \\ 0 & 33 & -55 & 143 \\ 0 & 0 & -4 & 8 \end{array}\right] \underset{(1/11)R_2}{\overset{(-1/4)R_3}{\Longrightarrow}} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -3 & 9 \\ 0 & 3 & -5 & 13 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right]$$

Det følger fra den siste raden at $z = -2$, og innsetting i ligningen over gir

$$\begin{aligned} 3y - 5z &= 13 \\ 3y - 5 \cdot (-2) &= 13 \\ 3y + 10 &= 13 \\ 3y &= 13 - 10 = 3 \end{aligned}$$

altså er $y = 1$. Innsetting i første ligning gir

$$\begin{aligned} x + 2 - 3 \cdot (-2) &= 9 \\ x + 8 &= 9 \end{aligned}$$

som gir at $x = 1$. $\square$

$\boxed{9.1.29}$ Avgjør om systemet

$$\begin{aligned} x - 2y + z &= 3 \\ 2x - 3y + z &= 8 \end{aligned}$$

er overbestemt eller underbestemt og løs det.

Løsning: Dette systemet har flere ukjente enn ligninger, og er dermed underbestemt. Det er naturlig å forvente at det har uendelig mange løsninger. Systemets utvidede koeffisientmatrise blir

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 2 & -3 & 1 & 8 \end{array}\right]$$

Vi reduserer systemet til trappeform (dette krever kun én radoperasjon)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 2 & -3 & 1 & 8 \end{array}\right] \overset{R_2 - 2R_1}{\Longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right]$$

Siste ligning gir $y - z = 2$, og vi kan velge z fritt; vi setter $z = t$, som gir $y = 2 + t$. Innsatt i første ligning gir det

$$\begin{aligned} x - 2y + z &= 3 \\ x - 2(2 + t) + t &= 3 \\ x - 4 - 2t + t &= 3 \\ x &= 7 + t \end{aligned}$$

Vi har altså uendelig mange løsninger, og ethvert punkt i løsningsmengden kan skrives $(x, y, z) = (7 + t, 2 + t, t)$ for en vilkårlig valgt t. $\square$

$\boxed{9.1.31}$ Avgjør om systemet

$$\begin{aligned} 2x - y &= 3 \\ x - y &= 4 \\ 3x - y &= 1 \end{aligned}$$

er underbestemt eller overbestemt og løs det.

Løsning: Systemet har flere ligninger enn ukjente og er dermed overbestemt. Det er naturlig å forvente at det er inkonsistent (altså at det ikke har løsninger).

Systemets utvidede koeffisientmatrise blir

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 4 \\ 3 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

Vi reduserer til trappeform (SWAP(R_i, R_j) betyr simpelthen at vi bytter om rad i og rad j):

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 4 \\ 3 & -1 & 1 \end{array}\right] \overset{\text{SWAP}(R_1,R_2)}{\Longrightarrow} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & 1 \end{array}\right] \underset{R_3-3R_1}{\overset{R_2-2R_1}{\Longrightarrow}} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & -5 & -15 \end{array}\right] \overset{R_3+5R_2}{\Longrightarrow} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & -40 \end{array}\right]$$

Dette systemet er altså inkonsistent (det har ingen løsning), siden siste ligning,

$$0x + 0y = -40,$$

umulig kan være oppfyllt for noen verdier av x og y. $\square$