Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Løsningsforslag — Øving 4

$\boxed{9.2.1}$ La

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Finn $A - B + 2C$.

Løsning: Vi har

$$\begin{aligned} A - B + 2C &= \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -1 - 0 + 2\cdot 1 & 2 - 1 + 2\cdot(-2) \\ 0 - 2 + 2\cdot 1 & -3 - 4 + 2\cdot(-1) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & -9 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

□

$\boxed{9.2.15}$ Finn den transponerte til matrisen

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

Løsning: Dette er en 2×3-matrise; den transponerte A' vil dermed bli en 3×2-matrise. Å finne den transponerte er kun et spørsmål om å bytte om rader og kolonner i den opprinnelige matrisen, altså første rad blir første kolonne i den transponerte og andre rad blir andre kolonne. Med andre ord,

$$A' = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$$

Vi kan også gjøre mer direkte bruk av definisjonen; dersom $A = [a_{ij}]$ og $A' = [a'_{ij}]$, så skal altså $a'_{ij} = a_{ji}$. F.eks er $a_{11} = -1$, $a_{21} = 2$ og $a_{13} = 3$, som betyr at $a'_{11} = -1$, $a'_{12} = 2$ og $a'_{31} = 3$. Dette ser vi at stemmer med matrisen A' over. □

$\boxed{9.2.16}$ Anta at A er en 2×2-matrise. Finn betingelser på elementene i A slik at $A + A' = \mathbf{0}$.

Løsning: Anta at
$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$
Da er
$$A' = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$$
og vi får at
$$A + A' = \begin{bmatrix} a+a & b+c \\ c+b & d+d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a & b+c \\ b+c & 2d \end{bmatrix}$$
Dersom $A + A' = \mathbf{0}$, så må altså $2a = 0$, $b + c = 0$ og $2d = 0$ som betyr at $a = d = 0$ og $b = -c$. En slik matrise er altså på formen
$$A = \begin{bmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{bmatrix}$$
□

For oppgave 9.2.21 og 9.2.22, la
$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

$\boxed{9.2.21}$ Regn ut AB og BA.

Løsning:
$$AB = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-1)\cdot 2 + 0 \cdot (-1) & (-1) \cdot 3 + 0 \cdot 1 \\ 1 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) & 1 \cdot 3 + 2 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$
$$BA = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 1 & 2 \cdot 0 + 3 \cdot 2 \\ (-1) \cdot (-1) + 1 \cdot 1 & (-1) \cdot 0 + 1 \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$
□

$\boxed{9.2.22}$ Regn ut ABC.

Løsning: Vi kan regne ABC ut som $(AB)C$, og fra forrige oppgave vet vi allerede at
$$AB = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

og dermed blir

$$
\begin{aligned}
ABC = (AB)C &= \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} (-2)\cdot 1 + (-3)\cdot 0 & (-2)\cdot 2 + (-3)\cdot(-1) \\ 0\cdot 1 + 5\cdot 0 & 0\cdot 2 + 5\cdot(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

□

$\boxed{9.2.29}$ Anta at A er en 4×3-matrise, B er en 1×3-matrise, C er en 3×1-matrise og D er en 4×3-matrise. Hvilke av følgende matriseprodukter er definert? Hva blir dimensjonene? **(a)** BD', **(b)** $D'A$, **(c)** ACB.

Løsning: For **(a)**, er B en 1×3-matrise, mens D' er en 3×4-matrise. Dermed er BD' definert, og blir en 1×4-matrise. For **(b)**, er (igjen) D' en 3×4-matrise og A er en 4×3-matrise, så produktet $D'A$ er definert og blir en 3×3-matrise. For **(c)**, er A en 4×3-matrise, C er en 3×1-matrise og dermed blir AC definert og resulterer i en 4×1-matrise. Siden B er en 1×3-matrise, er også produktet ACB definert og resulterer i en 4×3-matrise. □

$\boxed{9.2.31}$ La

$$
A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad \text{og} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}
$$

Regn ut AB og $B'A$.

Løsning:

$$
AB = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 5 & 9 & -1 \\ -4 & -2 & -6 & 0 \end{bmatrix}
$$

Siden

$$
B' = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 0 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}
$$

er

$$
B'A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 0 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \\ 0 & -6 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}
$$

□

$\boxed{9.2.43}$ Vis at inversen til

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

er

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Løsning: Vi ser at

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) & 2 \cdot (-1) + 1 \cdot 2 \\ 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) & 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$$

og

$$BA = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$$

□

$\boxed{9.2.45}$ Finn inversen (dersom den eksisterer) for matrisen

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Løsning: Her blir $\det A = (-1) \cdot 3 - 2 \cdot 1 = -5 \neq 0$, så A er invertibel (ikke-singulær). Vi bruker formelen på side 454 (i 3.utgave av læreboken)

$$A^{-1} = -\frac{1}{5} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

□

$\boxed{9.2.47}$ Vis at $(A^{-1})^{-1} = A$, for

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Løsning: Fra oppgaven over, vet vi at

$$A^{-1} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

Det enkleste er å bruke formelen en gang til på A^{-1} - vi har

$$\det A^{-1} = -\frac{3}{25} - \frac{2}{25} = -\frac{5}{25} = -\frac{1}{5}$$

Dermed blir

$$(A^{-1})^{-1} = -\frac{1}{1/5} \cdot \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = A$$

□

$\boxed{9.2.69}$ Finn inversen til matrisen

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

dersom den eksisterer.

Løsning: Vi skriver opp 3×6-matrisen $[A \mid I]$, og bruker elementære radoperasjoner for å omforme 3×3-matrisen til venstre til identitetsmatrisen. Dersom det lykkes, står vi da igjen med A^{-1} til høyre.

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$
$$\sim \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & -2 & 1 & 2 \end{array}\right]$$
$$\sim \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{array}\right]$$

som betyr at A er invertibel og

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

□

$\boxed{9.2.70}$ Finn inversen til

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

dersom den eksisterer.

Løsning:

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} -1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$
$$\sim \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

Vi ser her at vi har endt opp med en nullrad på venstre side. Dette betyr at A ikke er invertibel. Husk at det vi holder på med her er å løse 3 ligningssystemer samtidig, og nå står vi altså igjen med tre inkonsistente systemer; alle tre høyresidene er $\neq 0$, mens venstreside er lik 0. □