Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

9.2.51 Anta at

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \begin{bmatrix} -2 \\ -5 \end{bmatrix}$$

Finn X slik at $AX = B$ ved

a) å løse det tilhørende lineære ligningssystemet og

b) å bruke inversen til A.

Løsning: Systemet har utvidet koeffisientmatrise

$$\left[\begin{array}{rr|r} -1 & 0 & -2 \\ 2 & -3 & -5 \end{array}\right]$$

og systemet reduseres til trappeform ved å legge til 2 ganger rad 1 til rad 2:

$$\left[\begin{array}{rr|r} -1 & 0 & -2 \\ 2 & -3 & -5 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rr|r} -1 & 0 & -2 \\ 0 & -3 & -9 \end{array}\right]$$

Vi står igjen med $-3x_2 = -9$, altså $x_2 = 3$, og $-x_1 = -2$, altså $x_1 = 2$. Dermed kan løsningen skrives

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

For punkt **b)** har vi $\det(A) = (-1) \cdot (-3) = 3$, slik at A er invertibel og

$$A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$$

Dermed blir

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = X = A^{-1}D = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ -5 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 6 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$\square$

9.2.52 **a)** Vis at dersom $X = AX + D$, da er

$$X = (I - A)^{-1}D$$

forutsatt at $I - A$ er invertibel.

b) La

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad D = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Regn ut $(I - A)^{-1}$ og bruk resultatet fra **a)** til å regne ut X.

Løsning: Vi løser for X:

$$\begin{aligned} X &= AX + D \\ X - AX &= D \\ IX - AX &= D \\ (I - A)X &= D \end{aligned}$$

Dersom $I - A$ er invertibel, kan vi gange med $(I - A)^{-1}$ på begge sider av ligningen og få $X = (I - A)^{-1}D$.

Med A som over, blir

$$I - A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-3 & 0-2 \\ 0-0 & 1-(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Vi har $\det(I - A) = (-2) \cdot 2 = -4$, så $I - A$ er invertibel, og

$$(I - A)^{-1} = -\frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

og dermed blir

$$X = (I - A)^{-1}D = -\frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix} = -\frac{1}{4} \begin{bmatrix} 0 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

□

$\boxed{9.2.63}$ Bruk determinanten til å avgjøre om

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

er invertibel. Dersom den er invertibel, regn ut inversen. Uansett utfall, løs ligningen $AX = \mathbf{0}$.

Løsning: Vi har $\det(A) = 1 \cdot 2 - (-1) \cdot 0 = 2$, så A er invertibel, og

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Siden A er invertibel, har ethvert ligningssystem $AX = B$ entyding løsning, og dermed har $AX = \mathbf{0}$ kun den trivielle løsningen $X = \mathbf{0}$. □

$\boxed{9.2.65}$ Bruk determinanten til å avgjøre om

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

er invertibel. Dersom den er invertibel, regn ut inversen. Uansett utfall, løs lignings-systemet $CX = \mathbf{0}$.

Løsning: Vi ser at $\det(C) = 1 \cdot 3 - 1 \cdot 3 = 0$, så C er ikke invertibel. Dermed vet vi at $CX = \mathbf{0}$ har uendelig mange løsninger (systemet har som kjent alltid minst en, nemlig den trivielle løsningen $X = \mathbf{0}$). Radene i systemet er identiske, og systemet er dermed ekvivalent med $x_1 + 3x_2 = 0$, altså $x_1 = -3x_2$. Vi har altså en fri variabel, nemlig x_2, og vi lar $x_2 = t$. Da blir $x_1 = -3x_2 = -3t$, og vi kan skrive alle løsninger på formen

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3t \\ t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

der t er et vilkårlig tall. □

$\boxed{9.3.1}$ La

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \qquad \text{og} \qquad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

a) Vis ved direkte utregning at $A(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = A\mathbf{x} + A\mathbf{y}$.

b) Vis ved direkte utregning at $A(\lambda \mathbf{x}) = \lambda(A\mathbf{x})$.

Løsning: Vi har

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{bmatrix}$$

og

$$\begin{aligned} A(\mathbf{x} + \mathbf{y}) &= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) \\ 3(x_1 + y_1) + 4(x_2 + y_2) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2x_1 + x_2 \\ 3x_1 + 4x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2y_1 + y_2 \\ 3y_1 + 4y_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

På høyre side av ligningen har vi

$$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 + x_2 \\ 3x_1 + 4x_2 \end{bmatrix}$$

og

$$A\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2y_1 + y_2 \\ 3y_1 + 4y_2 \end{bmatrix}$$

som viser at $A(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = A\mathbf{x} + A\mathbf{y}$. Punkt **b)** er enklere:

$$\lambda \mathbf{x} = \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \end{bmatrix}$$

så

$$A(\lambda \mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\lambda x_1 + \lambda x_2 \\ 3\lambda x_1 + 4\lambda x_2 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 2x_1 + x_2 \\ 3x_1 + 4x_2 \end{bmatrix}$$

Siden

$$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 + x_2 \\ 3x_1 + 4x_2 \end{bmatrix}$$

så er også $A(\lambda \mathbf{x}) = \lambda(A\mathbf{x})$, som var det vi skulle vise. □

9.3.3 Tegn vektoren

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

i x_1-x_2 planet, og bestem lengde og retning (vinkelen vektoren danner med den positive x_1-aksen, målt i retning mot klokka).

Løsning: (Se fasit i læreboka for tegning.) Vi har $|\mathbf{x}| = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = \sqrt{4 \cdot 2} = 2\sqrt{2}$. For å bestemme vinkelen α, kan vi først merke oss at vinkelen α og lengden $r = |\mathbf{x}|$ skal oppfylle

$$\begin{aligned} 2 &= r \cos \alpha = 2\sqrt{2} \cos \alpha \\ 2 &= r \sin \alpha = 2\sqrt{2} \sin \alpha \end{aligned}$$

som betyr at

$$\cos \alpha = \sin \alpha = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Det betyr (se f.eks tabell på side 8 i læreboka) at

$$\alpha = 45^\circ = \frac{\pi}{4} \text{ radianer}$$

□

9.3.7 Tegn vektoren

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -\sqrt{3} \\ 1 \end{bmatrix}$$

i x_1-x_2 planet, og bestem lengde og retning (vinkelen vektoren danner med den positive x_1-aksen, målt i retning mot klokka).

Løsning: (Se fasit i læreboka for tegning). Vi har at $|\mathbf{x}| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{3+1} = 2$. Vinkelen α og lengden $r = |\mathbf{x}|$ skal oppfylle

$$\begin{aligned} -\sqrt{3} &= r \cos \alpha = 2 \cos \alpha \\ 1 &= r \sin \alpha = 2 \sin \alpha \end{aligned}$$

som betyr at $\cos\alpha = -\sqrt{3}/2$ og $\sin\alpha = 1/2$.

Vi ser fra tabellen på side 8 at $\sin 30^\circ = 1/2$ og $\cos 30^\circ = \sqrt{3}/2$. Vi kan bruke identitetene $\sin(180^\circ - \theta) = \sin\theta$ og $\cos(180^\circ - \theta) = -\cos\theta$, som betyr at

$$\cos 150^\circ = \cos(180^\circ - 30^\circ) = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\sin 150^\circ = \sin(180^\circ - 30^\circ) = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

Dermed blir

$$\alpha = 150^\circ = \frac{5\pi}{6} \text{ radianer}$$

□

$\boxed{9.3.13}$ Anta at en vektor

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

har lengde 3 og retning 15° *med klokka* fra den positive x_1-aksen. Finn x_1 og x_2.

Løsning: Formelen på side 469 tilsier at $x_1 = r\cos\alpha$ og $x_2 = r\sin\alpha$, der r er lengden og α er retningen (målt mot klokka fra den positive x_1-aksen). 15° med klokka er det samme som -15° mot klokka, altså er

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\cos(-15^\circ) \\ 3\sin(-15^\circ) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\cos 15^\circ \\ -3\sin 15^\circ \end{bmatrix}$$

□

$\boxed{9.3.29}$ La

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \qquad \text{og} \qquad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Regn ut $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ og illustrer resultatet grafisk.

Løsning: Se fasit i læreboka for illustrasjon. Vi har

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

□

$\boxed{9.3.41}$ Bruk en rotasjonsmatrise til å rotere vektoren $\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ en vinkel $\pi/6$ mot klokka.

Løsning: En matrise som roterer en vektor en vinkel θ mot klokka er gitt ved

$$R_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

Dersom $\theta = \pi/6$ (30°) er $\cos\theta = \sqrt{3}/2$ og $\sin\theta = 1/2$, altså blir rotasjonsmatrisen

$$R = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$$

Vi finner at

$$R\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -\sqrt{3}-2 \\ -1+2\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

□

$\boxed{\text{Tillegg}}$ Regn ut determinantene

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} \qquad \text{og} \qquad \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Løsning: Den første determinanten kan f.eks utvikles etter første rad:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} &= -1\cdot\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} - 0\cdot\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} + 2\cdot\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \\ &= (-1)((-2)\cdot(-1) - 2\cdot 3) + 2\cdot(-1)\cdot 2 = 4 - 4 = 0 \end{aligned}$$

Alternativt kan vi (f.eks) trekke første rad fra andre rad, og på den måten oppnå flere nuller i første kolonne; determinanten forblir uforandret (se notat) og vi utvikler så etter første kolonne:

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -1\cdot\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1((-2)\cdot(-1) - 2\cdot 1) = 0$$

Den andre determinanten er større, og gjør man utregningene direkte kan man stå igjen med en sum av så mange som 12 2×2-determinanter. Så vi bør enten bruke radoperasjoner for å gi en matrise med flere nuller, eller utnytte de som allerede er der. Her inneholder både kolonne 3 og rad 4 kun et element $\neq 0$, så dette er faktisk ikke mye vanskeligere enn å regne ut en 3×3-determinant (og denne gir igjen opphav til kun en

2×2-determinant, dersom man utvikler etter riktig rad eller kolonne). Vi utvikler etter 3. kolonne (fortegnet foran tredje element blir positivt):

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} &= 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\
&= 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 - (-1) \cdot (-1) = 2 - 1 = 1
\end{aligned}$$

Den resulterende 3×3-underdeterminanten er utviklet etter 3.rad (som også kun inneholder et element $\neq 0$).

Ønsker man å utvikle denne determinanten etter første rad, kan det naturligvis også gjøres, men da er det igjen nyttig å utføre en radoperasjon eller to for å få flere nuller. I denne matrisen ser vi at dersom vi legger til rad 2 til rad 1 blir første og siste element lik 0, mens andre element blir 1:

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\
&= -1 \begin{vmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\
&= (-1) \cdot 1 \cdot (-1 \cdot 1 - 2 \cdot 0) = -(-1) = 1
\end{aligned}$$

Den resulterende 3×3-underdeterminanten er utviklet etter 3.rad (som kun inneholder et element $\neq 0$). $\square$