Norges
teknisk–naturvitenskapelige
universitet
Institutt for matematiske fag

MA0002 Brukerkurs i matematikk B
Vår 2013

Løsningsforslag — Øving 6

$\boxed{9.2.71}$ Anta at en populasjon er delt inn i tre aldersklasser, og at 20% av hunnene av alder 0 og 70% av alder 1 overlever til slutten av neste paringstid. Anta videre at hunner av alder 1 får i snitt 3.2 avkom (hunner), og at hunner av alder 2 får i snitt 1.7 avkom (hunkjønn). Dersom, ved tid $t = 0$, populasjonen består av 2000 hunner av alder 0, 800 hunner av alder 1 og 200 hunner av alder 2, finn Lesliematrisen og aldersfordelingen ved tid $t = 2$.

Løsning: Antagelsene om overlevelsesrater betyr at følgende er oppfyllt:

$$N_1(t+1) = 0.2 \cdot N_0(t)$$
$$N_2(t+1) = 0.7 \cdot N_1(t)$$

Videre er $N_0(t+1) = 3.2 \cdot N_1(t) + 1.7 \cdot N_2(t)$. Det betyr at Lesliematrisen ser slik ut:

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 3.2 & 1.7 \\ 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0.7 & 0 \end{bmatrix}$$

Aldersfordelingen ved $t = 0$ kan skrives

$$N(0) = \begin{bmatrix} 2000 \\ 800 \\ 200 \end{bmatrix}$$

og vi finner aldersfordelingen ved $t = 2$ ved $N(2) = L(LN(0))$, som gir

$$N(1) = LN(0) = \begin{bmatrix} 0 & 3.2 & 1.7 \\ 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0.7 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2000 \\ 800 \\ 200 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.2 \cdot 800 + 1.7 \cdot 200 \\ 0.2 \cdot 2000 \\ 0.7 \cdot 800 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2900 \\ 400 \\ 560 \end{bmatrix}$$

Vi fortsetter:

$$N(2) = LN(1) = \begin{bmatrix} 0 & 3.2 & 1.7 \\ 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0.7 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2900 \\ 400 \\ 560 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.2 \cdot 400 + 1.7 \cdot 560 \\ 0.2 \cdot 2900 \\ 0.7 \cdot 400 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2232 \\ 580 \\ 280 \end{bmatrix}$$

□

$\boxed{9.2.75}$ Gitt Lesliematrisen

$$L = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 & 1 \\ 0.4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.8 & 0 \end{bmatrix}$$

Bestem antall aldersgrupper i populasjonen. Hvor stor andel av toåringer overlever til slutten av neste paringstid? Bestem det gjennomsnittlige antall avkom (hunner) til en to år gammel hunn.

Løsning: Populasjonen er delt inn i 4 aldersgrupper. Vi ser fra matrisen at $N_2(t+1) = 0.6 \cdot N_2(t)$, altså overlever 60% av toåringer til slutten av neste paringstid. Det fremgår fra matrisen at en to år gammel hunn får i gjennomsnitt 2 avkom. $\square$

$\boxed{9.3.49}$ Gitt matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Finn egenverdiene λ_1 og λ_2 og tilhørende egenvektorer $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$. Bestem ligningene for linjene gjennom origo i retningene til egenvektorene, og tegn linjene sammen med egenvektorene $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$ og $A\mathbf{v}_1$ og $A\mathbf{v}_2$ i samme koordinatsystem.

Løsning: Dette er en 2×2-matrise der produktet av elementene utenfor diagonalen er 0, slik at vi umiddelbart kan konkludere at egenverdiene blir $\lambda_1 = 2$ og $\lambda_2 = -1$ (se eksempel 8, side 478). For å finne tilhørende egenvektorer, må vi løse ligningssystemet $(A - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ for hver egenverdi λ. For $\lambda = 2$ får vi et ligningssystem med utvidet koeffisientmatrise

$$\left[\begin{array}{cc|c} 0 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \end{array}\right]$$

som reduseres til ligningen $0 \cdot x_1 + 3x_2 = 0$. Det følger at x_1 kan velges fritt, og vi setter $x_1 = t$, og at $x_2 = 0$. Alle løsninger av systemet (altså, egenvektorer tilhørende egenverdien $\lambda = 2$) kan dermed skrives

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ 0 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Det betyr at f.eks

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

er en egenvektor tilhørende $\lambda = 2$. Denne vektoren ligger på linjen med ligning $x_2 = 0$. Den andre egenverdien, $\lambda = -1$, gir systemet

$$\left[\begin{array}{cc|c} 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

som betyr at $x_1 + x_2 = 0$, og vi setter $x_2 = t$ som gir $x_1 = -t$. Alle løsninger (egenvektorer) kan dermed skrives

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

så vi kan velge

$$\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Alle disse vektorene ligger langs linjen med ligning $x_2 = -x_1$. Se fasit for tegning. Vi kan merke oss at for den første egenverdien, $\lambda = 2$, peker $A\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_1$ i samme retning, mens for den andre egenverdien $\lambda = -1$ peker $A\mathbf{v}_2$ og $\mathbf{v}_2$ i motsatt retning. $\square$

$\boxed{\text{9.3.55}}$ Samme som oppgave 9.3.49 for matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Løsning: Vi har

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(3-\lambda) - 2$$

og $(2-\lambda)(3-\lambda) - 2 = \lambda^2 - 5\lambda + 4$ og det følger at

$$\det(A - \lambda I) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \lambda = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2}$$

altså er egenverdiene $\lambda_1 = 4$ og $\lambda_2 = 1$. For å finne tilhørende egenvektorer, løser vi systemet $(A - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ for hver egenverdi λ. For $\lambda = 4$, får vi et system med utvidet koeffisientmatrise

$$\left[\begin{array}{rr|r} -2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rr|r} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

som gir ligningen $2x_1 - x_2 = 0$. Vi setter $x_2 = 2t$, og da blir $x_1 = t$, og vi har

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

og vi kan velge

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Alle egenvektorer tilhørende egenverdien $\lambda = 4$ ligger på linjen med ligning $x_2 = 2x_1$. For $\lambda = 1$, får vi systemet

$$\left[\begin{array}{rr|r} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rr|r} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

altså $x_1 + x_2 = 0$ som med $x_2 = t$ gir $x_1 = -t$. Altså kan alle egenvektorer skrives

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

så vi kan velge
$$\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$
Egenvektorene tilhørende egenverdien $\lambda = 1$ ligger langs linjen $x_2 = -x_1$. Se fasit i boka for tegning. Siden begge egenverdiene er positive, vil $A\mathbf{v}_i$ og $\mathbf{v}_i$ for $i = 1, 2$ peke i samme retning (siden $\lambda_2 = 1$, blir $A\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_2$). $\square$

$\boxed{9.3.59}$ Finn egenverdiene λ_1 og λ_2 for matrisen
$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Løsning: Dette er en matrise der produktet av elementene utenfor diagonalen er 0, slik at egenverdiene simpelthen blir elementene på diagonalen, nemlig $\lambda_1 = 1$ og $\lambda_2 = 2$ (se eksempel 8, side 478). $\square$

$\boxed{9.3.61}$ Finn egenverdiene λ_1 og λ_2 for matrisen
$$A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ c & b \end{bmatrix}$$

Løsning: Igjen blir produktet av elementene utenfor diagonalen $c \cdot 0 = 0$, så egenverdiene blir elementene på diagonalen, nemlig $\lambda_1 = a$ og $\lambda_2 = b$ (se eksempel 8, side 478). $\square$

$\boxed{9.3.63}$ La
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$$

Avgjør om realdelen til begge egenverdiene er negativ, uten å eksplisitt beregne dem.

Løsning: Vi har $\operatorname{tr} A = 2 + (-3) = -1$ og $\det A = 2 \cdot (-3) - (-2) \cdot 4 = -6 + 8 = 2$. Siden $\det A > 0$ og $\operatorname{tr} A < 0$ følger det at begge egenverdiene har negativ realdel (fra teoremet på side 480). $\square$

9.3.65 Samme som 9.3.63 for matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ -4 & -3 \end{bmatrix}$$

Løsning: Her er $\operatorname{tr} A = 4 + (-3) = 1$ og $\det A = 4 \cdot (-3) - (-4) \cdot 4 = 4$. Siden $\operatorname{tr} A > 0$, har ikke begge egenverdiene negativ realdel. Vi kan faktisk konkludere at begge egenverdiene må ha positiv realdel - $\det A = \lambda_1 \lambda_2 > 0$ som gir at de må ha samme fortegn, og siden $\operatorname{tr} A = \lambda_1 + \lambda_2 > 0$ må begge realdelene være positive. □

9.3.69 La

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

a) Vis at

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \text{og} \qquad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

er egenvektorer for A og at $\mathbf{u}_1$ og $\mathbf{u}_2$ er lineært uavhengige.

Løsning: Legg merke til at det ikke er nødvendig å finne egenverdiene til A og regne ut tilhørende egenvektorer her - alt vi trenger å gjøre er å sjekke at $A\mathbf{u}_1 = \lambda_1 \mathbf{u}_1$ og $A\mathbf{u}_2 = \lambda_2 \mathbf{u}_2$ for passende tall λ_1 og λ_2 (som vil være egenverdier for A). Vi finner at

$$A\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} = (-1) \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = (-1)\mathbf{u}_1$$

så $\mathbf{u}_1$ er en egenvektor for A med tilhørende egenverdi $\lambda_1 = -1$. Videre er

$$A\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix} = 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = 2\mathbf{u}_2$$

så $\mathbf{u}_2$ er en egenvektor for A med tilhørende egenverdi $\lambda_2 = 2$. Siden $\lambda_1 \neq \lambda_2$, vet vi at de tilhørende egenverdiene er lineært uavhengige (se det innrammede resultatet nederst på side 481). Vi kan også se dette relativt lett ved regning; dersom $\mathbf{u}_1$ og $\mathbf{u}_2$ er lineært *avhengige* (altså ikke lineært uavhengige), så finnes c_1 og c_2 (ikke begge 0), slik at $c_1\, \mathbf{u}_1 + c_2 \mathbf{u}_2 = \mathbf{0}$, altså

$$c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dette er ekvivalent med systemet

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{array}\right]$$

Det at $\mathbf{u}_1$ og $\mathbf{u}_2$ er lineært uavhengige, er ekvivalent med at ligningssystemet over bare har den trivielle løsningen

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

noe som er ekvivalent med at matrisen

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

er ikke-singulær, som igjen er ekvivalent med at $\det B \neq 0$. Her ser vi at $\det B = 3 \neq 0$, slik at vektorene $\mathbf{u}_1$ og $\mathbf{u}_2$ er lineært uavhengige. □

b) Representer vektoren

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$$

som en lineærkombinasjon av $\mathbf{u}_1$ og $\mathbf{u}_2$.

Løsning: Vi må altså finne tall a_1 og a_2 slik at

$$a_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + a_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Det er relativt lett å se mer eller mindre umiddelbart at $a_1 = 2$ og $a_2 = -1$, men vi kan også gjøre dette mer systematisk; ligningen over er ekvivalent med systemet

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 \end{array}\right]$$

Dette er allerede på trappeform, og vi finner at $3a_2 = -3$, altså $a_2 = -1$ og $a_1 + a_2 = 1$, altså $a_1 = 2$. □

c) Bruk resultatene dine fra over til å beregne $A^{20}\mathbf{x}$.

Løsning: Vi har

$$A^{20}\mathbf{x} = A^{20}(2\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) = (-1)^{20} \cdot 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + (-1) \cdot 2^{20} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1048574 \\ -3145728 \end{bmatrix}$$

□

9.3.71 La

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Finn

$$A^{15} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

uten å bruke kalkulator.

Løsning: Metoden er stort sett den samme som over, bortsett fra at vi ikke får oppgitt svarene underveis. Vi må først finne egenverdiene til A og tilhørende egenvektorer. Egenverdiene kan leses rett ut av matrisen (siden produktet av elementene utenfor diagonalen er 0), og blir $\lambda_1 = -1$ og $\lambda_2 = 1$. Vi finner en egenvektor tilhørende $\lambda_1 = -1$ ved å løse systemet

$$\left[\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{array}\right]$$

altså $3x_1 + 2x_2 = 0$, slik at alle egenvektorer (med egenverdi $\lambda = -1$) er på formen

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

og vi velger

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

For egenverdien $\lambda_2 = 1$, får vi systemet

$$\left[\begin{array}{cc|c} -2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

som gir $x_1 + 0x_2 = 0$, altså $x_2 = t$ og $x_1 = 0$, og vi kan velge

$$\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Vi ser at

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = (-1) \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Dermed blir

$$\begin{aligned} A^{15} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} &= A^{15}(-1 \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}) \\ &= -1 \cdot A^{15} \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix} + 3A^{15} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= -1 \cdot (-1)^{15} \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix} + 3 \cdot 1^{15} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix} + 3 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 6 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

□

$\boxed{9.3.75}$ Anta at

$$L = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0.3 & 0 \end{bmatrix}$$

er Lesliematrisen for en populasjon med to aldersgrupper.

a) Bestem begge egenverdier.

Løsning: Vi finner at

$$\det(L - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 4 \\ 0.3 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda - 1.2$$

så

$$\det(L - \lambda I) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \lambda = \frac{2 \pm \sqrt{4 \cdot 2.2}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{2.2}}{2}$$

så egenverdiene blir $\lambda_1 = 1 + \sqrt{2.2} \approx 2.48$ og $1 - \sqrt{2.2} \approx -0.48$. □

b) Gi en biologisk tolkning av den største egenverdien.

Løsning: Den største egenverdien svarer til vekstraten til populasjonen (i det lange løp). □

c) Finn den stabile aldersfordelingen.

Løsning: Vi må først finne en egenvektor tilhørende den største egenverdien; med $\lambda_1 = 1 + \sqrt{2.2}$, blir

$$L - \lambda_1 I = \begin{bmatrix} 1-\sqrt{2.2} & 4 \\ 0.3 & -1-\sqrt{2.2} \end{bmatrix}$$

Systemet $(L - \lambda_1 I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ blir

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1-\sqrt{2.2} & 4 & 0 \\ \frac{3}{10} & -1-\sqrt{2.2} & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 4/(1-\sqrt{2.2}) & 0 \\ 1 & 10(-1-\sqrt{2.2})/3 & 0 \end{array}\right]$$

Det viser seg faktisk at

$$\frac{4}{1-\sqrt{2.2}} = \frac{10(-1-\sqrt{2.2})}{3}$$

Dette er ikke veldig vanskelig å vise; merk at

$$\frac{4}{1-\sqrt{2.2}} - \frac{10(-1-\sqrt{2.2})}{3} = 0$$

hvis og bare hvis

$$4 - \frac{10(-1-\sqrt{2.2})(1-\sqrt{2.2})}{3} = 0$$

Sistnevnte ligning er kun førtstnevnte ganget med $1-\sqrt{2.2}$, og $(-1-\sqrt{2.2})(1-\sqrt{2.2}) = -1+\sqrt{2.2}-\sqrt{2.2}+2.2 = -1+2.2 = 1.2$, og

$$\frac{10 \cdot 1.2}{3} = \frac{12}{3} = 4$$

Det betyr at systemet er ekvivalent med

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 4/(1-\sqrt{2.2}) & 0 \\ 1 & 4/(1-\sqrt{2.2}) & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 4/(1-\sqrt{2.2}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Det betyr at $x_2 = t$ (fri variabel) og

$$x_1 = -\frac{4}{1-\sqrt{2.2}}t \approx 8.277t$$

Vi kan velge $t = 1$, så egenvektoren blir (omtrent)

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 8.277 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Det betyr at andelen av individer i aldersgruppe 0 blir

$$\frac{8.277}{8.277+1} \approx 0.892$$

og andelen individer i aldersgruppe 1 blir

$$\frac{1}{8.277+1} \approx 0.108$$

Altså vil (i det lange løp) 89.2% av individene i populasjonen befinne seg i aldersgruppe 0, mens de resterende 10.8% befinner seg i aldersgruppe 1. □