Norges
teknisk–naturvitenskapelige
universitet
Institutt for matematiske fag

MA0002 Brukerkurs i matematikk B
Vår 2013

Løsningsforslag — Øving 7

$\boxed{9.4.5}$ La $A = (0, 1, -3)$ og $B = (-1, -1, 2)$. Finn vektorrepresentasjonen til $\overrightarrow{AB}$.

Løsning: Vektoren som representerer linjestykket $\overrightarrow{AB}$ er gitt ved

$$\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

□

$\boxed{9.4.9}$ Finn lengden av $\mathbf{x} = [0, 1, 5]'$.

Løsning: Lengden til $\mathbf{x}$ er gitt ved

$$|\mathbf{x}| = \sqrt{0^2 + 1^2 + 5^2} = \sqrt{26}$$

□

$\boxed{9.4.11}$ Normaliser vektoren $\mathbf{x} = [1, 3, -1]'$.

Løsning: Vi har

$$|\mathbf{x}| = \sqrt{1^2 + 3^2 + (-1)^2} = \sqrt{11}$$

slik at normaliseringen $\hat{\mathbf{x}}$ av $\mathbf{x}$ blir

$$\hat{\mathbf{x}} = \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|} = \frac{1}{\sqrt{11}} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

□

$\boxed{\text{9.4.25}}$ Finn vinkelen α mellom vektorene $\mathbf{x} = [0, -1, 3]'$ og $\mathbf{y} = [-3, 1, 1]'$.

Løsning: Vi har

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 0 \cdot (-3) + (-1) \cdot 1 + 3 \cdot 1 = -1 + 3 = 2.$$

og

$$|\mathbf{x}| = \sqrt{0^2 + (-1)^2 + 3^2} = \sqrt{10}, \qquad |\mathbf{y}| = \sqrt{(-3)^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{11}$$

Siden

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = |\mathbf{x}||\mathbf{y}| \cos \alpha$$

følger det at

$$\cos \alpha = \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}}{|\mathbf{x}||\mathbf{y}|} = \frac{2}{\sqrt{10}\sqrt{11}} = \frac{2}{\sqrt{110}} = \sqrt{\frac{2}{55}}$$

og dermed blir

$$\alpha = \cos^{-1}\left(\sqrt{\frac{2}{55}}\right) \approx 79^\circ$$

eller $\alpha \approx 1.379$ radianer. □

$\boxed{\text{9.4.37}}$ Finn ligningen for linjen gjennom $(1, -2)$ som står vinkelrett på $[4, 1]'$.

Løsning: La $\mathbf{n} = [4, 1]'$, $\mathbf{r}_0 = [1, -2]'$ og $\mathbf{r} = [x, y]$. Dersom $P = (x, y)$ er et punkt på linjen, skal vektoren $\mathbf{r} = \overrightarrow{OP}$ oppfylle

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x - 1 \\ y + 2 \end{bmatrix} = 0$$

eller

$$4 \cdot (x - 1) + 1 \cdot (y + 2) = 4x - 4 + y + 2 = 4x + y - 2 = 0$$

altså

$$y = -4x + 2$$

□

$\boxed{\text{9.4.39}}$ Finn ligningen til planet gjennom punktet $(1, 2, 3)$ som står vinkelrett på $[0, -1, 1]'$.

Løsning: La $\mathbf{n} = [0, -1, 1]$, $\mathbf{r}_0 = [1, 2, 3]$ og $\mathbf{r} = [x, y, z]$. Dersom $P = (x, y, z)$ er et punkt på planet, skal vektoren $\mathbf{r} = \overrightarrow{OP}$ oppfylle

$$\begin{aligned} \mathbf{n} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) &= \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x-1 \\ y-2 \\ z-3 \end{bmatrix} = 0 \cdot (x-1) + (-1) \cdot (y-2) + 1 \cdot (z-3) \\ &= -y + 2 + z - 3 = z - y - 1 = 0 \end{aligned}$$

□

$\boxed{9.4.47}$ Finn ligningen for linjen gjennom punktene $P = (-1, 2)$ og $Q = (3, 4)$ på parametrisk form. Eliminer deretter parameteren og skriv ned ligningen på standardform (normalform).

Løsning: La

$$\mathbf{u} = \overrightarrow{PQ} = \begin{bmatrix} 3-(-1) \\ 4-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

En mulig parametrisering av linjen (på vektorform) er dermed

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \overrightarrow{OP} + t\mathbf{u} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Vi skriver også ned de to skalare ligningene som beskriver linjen:

$$\begin{aligned} x &= -1 + 4t \\ y &= 2 + 2t \end{aligned}$$

Vi kan f.eks løse den siste ligningen for t, som gir

$$t = \frac{y-2}{2}$$

og innsetting i den første ligningen gir

$$x = -1 + 4t = -1 + 4 \cdot \frac{y-2}{2} = -1 + 2(y-2) = -5 + 2y$$

så ligningen kan skrives

$$x - 2y = -5$$

på standardform. □

$\boxed{9.4.51}$ Finn en parametrisering av ligningen

$$3x + 4y - 1 = 0$$

på standardform.

Løsning: Det enkleste er å sette $x = t$, og løse for y i ligningen over:

$$\begin{aligned} 4y &= 1 - 3x = 1 - 3t \\ y &= \frac{1}{4} - \frac{3}{4}t \end{aligned}$$

eller skrevet på vektorform

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{3}{4} \end{bmatrix}$$

□

9.4.63 Gitt planet gjennom $(1, -1, 2)$ som står vinkelrett på $[1, 2, 1]'$, og linjen gjennom $(0, -3, 2)$ og $(-1, -2, 3)$. Hvor skjærer de hverandre?

Løsning: Anta at linjen har ligning (på parametrisk form)

$$\mathbf{r} = \mathbf{v}_0 + t\mathbf{u}$$

for vektorer $\mathbf{v}_0$ og $\mathbf{u}$, og at planet har ligning

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0$$

Dersom disse skjærer hverandre i et punkt på linjen må vi ha

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{v}_0 + t\mathbf{u} - \mathbf{r}_0) = 0$$

Vi regner ut og løser for t (se regnereglene på side 493 - merk også at $\mathbf{v} \cdot (c\mathbf{u}) = c\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$ for ethvert tall c):

$$\begin{aligned} \mathbf{n} \cdot (t\mathbf{u} + \mathbf{v}_0 - \mathbf{r}_0) &= 0 \\ t\mathbf{n} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{n} \cdot (\mathbf{v}_0 - \mathbf{r}_0) &= 0 \\ t\mathbf{n} \cdot \mathbf{u} &= -\mathbf{n} \cdot (\mathbf{v}_0 - \mathbf{r}_0) \\ t &= \frac{-\mathbf{n} \cdot (\mathbf{v}_0 - \mathbf{r}_0)}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}} \end{aligned}$$

Dette gir oss altså parameteren t til skjæringspunktet (hvis det finnes) - dette gir mening hvis (og bare hvis) $\mathbf{n} \cdot \mathbf{u} \neq 0$, altså planets normal og retningsvektoren til linjen kan ikke stå vinkelrett på hverandre. Dette ville i så fall bety at retningsvektoren til linjen er parallell med planet, og i det tilfellet har vi bare en løsning hvis "startpunktet" (med koordinater $\mathbf{v}_0$) til linjen ligger i planet, så dette bør vi utelukke først.

Vi fortsetter nå med å skrive ned ligningene for linjen og planet, og deretter bruke ligningen over for å finne verdien av t - skjøringspunktet kan dermed enkelt regnes ut. Planet har ligning gitt ved

$$\mathbf{n} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \text{og} \qquad \mathbf{r}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

mens linjen kan parametriseres ved

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

og (f.eks)

$$\mathbf{v}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Vi har

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = -1 + 2 + 1 = 2$$

og

$$\mathbf{v}_0 - \mathbf{r}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dermed blir

$$-\mathbf{n} \cdot (\mathbf{v}_0 - \mathbf{r}_0) = -\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} = -1(-1-4) = 5$$

og det følger at

$$t = \frac{-\mathbf{n} \cdot (\mathbf{v}_0 - \mathbf{r}_0)}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}} = \frac{5}{2}$$

Det betyr at skjæringspunktet er gitt ved

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \mathbf{v}_0 + t\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix} + \frac{5}{2} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{5}{2} \\ -3 + \frac{5}{2} \\ 2 + \frac{5}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{5}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{9}{2} \end{bmatrix}$$

□

$\boxed{9.4.65}$ Gitt et plan gjennom $P = (0, -2, 1)$ med normal $\mathbf{n} = [-1, 1, -1]'$. Finn en linje gjennom $Q = (5, -1, 0)$ som er parallell med planet.

Løsning: En slik linje må ha en retningsvektor som står vinkelrett på normalen til planet, altså være på formen $\mathbf{r} = \overrightarrow{OQ} + t\mathbf{u}$ der $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$. La $\mathbf{u} = [u_1, u_2, u_3]'$; sistnevnte ligning er det samme som

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = -u_1 + u_2 - u_3 = 0$$

En mulig løsning er $u_1 = u_3 = 1$ og $u_2 = 2$, altså

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

som gir parametriseringen

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5+t \\ -1+2t \\ t \end{bmatrix}$$

Fasiten bruker en annen retningsvektor, nemlig $\mathbf{u} = [1,1,0]'$ - eneste krav er som nevnt at $-u_1 + u_2 - u_3 = 0$ og at $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$. □

10.1.7 Evaluer funksjonen $f_1(x,y) = 2x - 3y^2$ i $(-1,2)$ og $f_2(y,x) = 2x - 3y^2$ i punktet $(-1,2)$.

Løsning: Vi setter $x = -1$ og $y = 2$ inn i uttrykket for $f_1(x,y)$, altså

$$f_1(-1,2) = 2 \cdot (-1) - 3 \cdot 2^2 = -2 - 12 = -14$$

og $y = -1$ og $x = 2$ inn i uttrykket for $f_2(y,x)$, altså

$$f_2(-1,2) = 2 \cdot 2 - 3 \cdot (-1)^2 \;= 4 - 3 = 1$$

□

10.1.19-21 Finn ut hvilken av følgende funksjoner

$$\begin{aligned} f(x,y) &= 1 + x^2 + y^2 \\ g(x,y) &= \sin(x)\sin(y) \\ h(x,y) &= y^2 - x^2 \end{aligned}$$

som svarer til riktig graf (avbildet på side 511 i læreboka).

Løsning: Funksjonen $f(x,y) = 1 + x^2 + y^2$ svarer til figur 10.23. Den avbildede grafen viser at funksjonsverdiene øker jo lenger unna origo vi kommer, og det faktum at dersom vi holder x eller y fast, får vi en parabel med åpning langs den positive z-aksen. Dersom f.eks $y = 0$, så er $z = f_0(x) = f(x,0) = 1 + 0^2 + x^2 = 1 + x^2$ som er en parabel i x-z-planet. Med andre ord, horisontale eller vertikale snitt i grafen skal gi oss parabeler med åpning "oppover", noe som stemmer bra med hvordan grafen ser ut.

Funksjonen $g(x,y) = \sin(x)\sin(y)$ er avbildet på figur 10.22. Her kan vi igjen argumentere ved å holde en av variablene konstant - med $y = -2$ (f.eks), har vi $k = \sin(-2)$, som gir

$$g_{-2}(x) = g(x,-2) = \sin(x)\sin(-2) = k\sin(x)$$

og det ser ut til å stemme bra overens med grafen som er avbilded på figur 10.22, men ingen andre.

Den siste funksjonen, $h(x,y) = y^2 - x^2$, svarer til figur 10.24 - grafen som er avbildet på figur 10.21 viser en funksjon som ikke varierer med y, og siden $h(x,y)$ åpenbart avhenger av y, må den svare til figur 10.24. Vi kan også her se hva som skjer når vi holder en av variablene fast - la først $x = c$, slik at

$$h_c\ (y) = h(c,y) = y^2 - c^2$$

som er en parabel med åpning opp (langs den positive z-aksen), mens dersom $y = c$ får vi

$$h_c(x) = h(x,c) = c^2 - x^2$$

som vil bli en parabel med åpning ned (tegn grafen til f.eks $y = 1 - x^2$ og $y = x^2 - 1$ med en grafisk kalkulator eller et passende dataprogram dersom dette ikke er helt opplagt).
□

$\boxed{\text{10.1.25}}$ Figur 10.26 (i læreboka) viser oksygenkonsentrasjonen for *Long Lake, Clear Water County (Minnesota)*. Vannloppen *Daphnia* kan overleve kun dersom oksygenkonsentrasjonen er høyere enn 3 mg/l. Anta at du ønsker å ta en prøve av Daphnia populasjonen i 1997 på dag 180, 200 og 220. Ved hvilken dybde kan du være rimelig sikker på å *ikke* finne *Daphnia*?

Løsning: Det som er relevant her er nivåkurven som svarer til en oksygenkonsentrasjon på 3 mg/l. Ved dag 180 ligger den på dybde 22.5 m, ved dag 200 på dybde ca. 17.5 m. og ved dag 220 ved dybde ca. 15 m. Går man dypere enn dette, kan man være rimelig sikker på å ikke finne noen *Daphnia*. (Fasiten har litt andre svar, men det spiller liten rolle.)

□