Norges
teknisk–naturvitenskapelige
universitet
Institutt for matematiske fag

MA0002 Brukerkurs i matematikk B
Vår 2013

Løsningsforslag — Øving 8

$\boxed{10.2.1}$ Regn ut

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} (x^2 - 3y^2)$$

Løsning: Vi har

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(1,0)} (x^2 - 3y^2) &= \left(\lim_{(x,y)\to(1,0)} x^2\right) - 3\cdot\left(\lim_{(x,y)\to(1,0)} y^2\right)\\ &= 1^2 - 3\cdot 0^2 = 1\end{aligned}$$

□

$\boxed{10.2.11}$ Regn ut

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{2xy-3}{x^2+y^2\ +1}$$

Løsning: Vi har

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{2xy-3}{x^2+y^2\ +1} &= \frac{\lim_{(x,y)\to(0,1)} 2xy-3}{\lim_{(x,y)\to(0,1)} x^2+y^2+1}\\ &= \frac{2\cdot 0\cdot 1-3}{0^2+1^2+1} = \frac{-3}{2} = -\frac{3}{2}\end{aligned}$$

□

$\boxed{10.2.15}$ Vis at

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-2y^2}{x^2+y^2}$$

ikke eksisterer ved å regne ut grensen langs den positive x-aksen og den positive y-aksen.

Løsning: Langs den positive x-aksen er $y = 0$, så

$$\frac{x^2 - 2y^2}{x^2 + y^2} = \frac{x^2}{x^2} = 1$$

siden $x \neq 0$. Det betyr at grensen når vi nærmer oss origo langs den positive x-aksen er 1. Langs den positive y-aksen er $x = 0$, og

$$\frac{x^2 - 2y^2}{x^2 + y^2} = \frac{-2y^2}{y^2} = -2$$

siden $y \neq 0$. Altså, dersom vi nærmer oss origo langs den positive y-aksen, blir grensen -2. Siden $-2 \neq 1$, kan ikke grensen

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 - 2y^2}{x^2 + y^2}$$

eksistere. □

$\boxed{10.2.17}$ Regn ut

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{4xy}{x^2 + y^2}$$

langs x-aksen, y-aksen og linjen $y = x$. Hva kan du konkludere?

Løsning: Langs x-aksen er $y = 0$ og langs y-aksen er $x = 0$. I begge tilfeller er $4xy = 0$, mens $x^2 + y^2 \neq 0$, slik at

$$\frac{4xy}{x^2 + y^2} = 0$$

og dermed blir grensen langs enten x-aksen eller y-aksen også lik 0. Dersom $y = x$, har vi

$$\frac{4x^2}{x^2 + y^2} = \frac{4x^2}{x^2 + x^2} = 2$$

så grensen langs linjen $y = x$ blir 2. Vi kan konkludere at grensen

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{4xy}{x^2 + y^2}$$

ikke eksisterer. □

$\boxed{10.2.23}$ Vis at

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{4xy}{x^2+y^2} & \text{for } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{for } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

er diskontinuerlig i $(0,0)$ (Hint: Bruk oppgave 10.2.17).

Løsning: Vi vet fra oppgave 10.2.17 at grensen

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{4xy}{x^2+y^2}$$

ikke eksisterer, og siden dette er et krav for at funksjonen skal være kontinuerlig i $(0,0)$, kan ikke $f(x,y)$ være kontinuerlig i $(0,0)$. □

10.2.27 Skriv

$$h(x,y) = \sin(x^2+y^2)$$

som en sammensetting av to funksjoner. For hvilke verdier av (x,y) er $h(x,y)$ kontinuerlig?

Løsning: La $f(x,y) = x^2+y^2$, og la $g(u) = \sin(u)$. Da er

$$\sin(x^2+y^2) \; = g(x^2+y^2) \; = g(f(x,y)) = (g \circ f)(x,y)$$

Siden $f(x,y)$ er definert på hele $\mathbb{R}^2$, og g er definert på hele $\mathbb{R}$ er h også definert på hele $\mathbb{R}^2$. Siden både f og g er kontinuerlige overalt, er også $g \circ f$ kontinuerlig på hele $\mathbb{R}^2$ (se side 516). □

10.2.28 Skriv

$$h(x,y) = \sqrt{x+y}$$

som en sammensetting av to funksjoner. For hvilke verdier av (x,y) er $h(x,y)$ kontinuerlig?

Løsning: La $f(x,y) = x+y$ og $g(u) = \sqrt{u}$. Da er

$$\sqrt{x+y} = g(x+y) = g(f(x,y)) = (g \circ f)(x,y)$$

Her er $f(x,y)$ definert på hele $\mathbb{R}^2$, mens $g(u)$ er definert bare for $u \geq 0$. Sammensettingen er dermed definert for alle (x,y) slik at $x+y \geq 0$. Igjen er begge funksjonene kontinuerlige der de er definert, så sammensettingen $h(x,y)$ er definert på

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x+y \geq 0\}$$

□

10.3.1 Finn $\partial f/\partial x$ og $\partial f/\partial y$ for

$$f(x,y) = x^2y + xy^2$$

Løsning: Vi har

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy + y^2$$

og

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + x \cdot 2y = x^2 + 2xy$$

□

$\boxed{10.3.5}$ Finn $\partial f/\partial\, x$ og $\partial f/\partial y$ for

$$f(x,y) = \sin(x+y)$$

Løsning: Vi bruker kjerneregelen, med $u = x + y$. Det gir

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial \sin u}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = \cos(u) \cdot 1 = \cos(x+y),$$

og

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial \sin u}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = \cos(u) \cdot 1 = \cos(x+y).$$

□

$\boxed{10.3.13}$ Finn $\partial f/\partial x$ og $\partial f/\partial y$ for

$$f(x,y) = \ln(2x+y)$$

Løsning: Vi bruker kjerneregelen med $u = 2x + y$. Det gir

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial \ln u}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{u} \cdot 2 = \frac{2}{2x+y},$$

og

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial \ln u}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{u} \cdot 1 = \frac{1}{2x+y}$$

□

$\boxed{10.3.41}$ Finn

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \qquad \text{for} \qquad f(x,y) = xe^y$$

Løsning: Vi har

$$\frac{\partial f}{\partial y} = xe^y$$

og dermed blir

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} xe^y = e^y$$

$\square$

$\boxed{\text{10.3.45}}$ Finn

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} \qquad \text{for} \qquad f(x,y) = x^3 \cos y$$

Vi har

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -x^3 \sin y$$

og dermed blir

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} - x^3 \sin y = \frac{\partial}{\partial x} - 3x^2 \sin y = -6x \sin y$$