Norges
teknisk–naturvitenskapelige
universitet
Institutt for matematiske fag

MA0002 Brukerkurs i matematikk B
Vår 2013

Løsningsforslag — Øving 9

$\boxed{10.4.1}$ Finn ligningen til tangentplanet i $(1, 2, 6)$ for funksjonen $f(x, y) = 2x^3 + y^2$.

Løsning: Ligningen for tangentplanet i (x_0, y_0) til en funksjon $f(x, y)$ er gitt ved

$$z - z_0 = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}(y - y_0)$$

Vi regner derfor først ut de partiellderiverte til funksjonen; vi har

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 6x^2$$
$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 2y$$

og

$$\frac{\partial f(1,2)}{\partial x} = 6 \cdot 1^2 = 1$$
$$\frac{\partial f(1,2)}{\partial y} = 2 \cdot 2 = 4$$

Dermed blir ligningen for planet (med $(x_0, y_0, z_0) = (1, 2, 6)$)

$$z - 6 = 6(x-1) + 4(y-2) = 6x - 6 + 4y - 8 = 6x + 4y - 14$$
$$6x + 4y - z = 8$$

□

$\boxed{10.4.7}$ Finn ligningen til tangentplanet i $(1, 0, e)$ for funksjonen $f(x, y) = e^{x^2+y^2}$.

Løsning: Løsningen er helt tilsvarende som i forrige oppgave; vi ser at

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 2xe^{x^2+y^2}$$
$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 2ye^{x^2+y^2}$$

og dermed blir

$$\frac{\partial f(1,0)}{\partial x} = 2 \cdot 1 \cdot e^{1^2+0^2} = 2e$$
$$\frac{\partial f(1,0)}{\partial y} = 2 \cdot 0 \cdot e^{1^2+0^2} = 0$$

og dermed blir ligningen for tangentplanet gitt ved

$$z - e = 2e(x-1) + 0 \cdot (y-0) = 2ex - 2e$$
$$2ex - z = e$$

□

10.4.19 Finn lineariseringen til $f(x,y) = \sqrt{x} + 2y$ i $(1,0)$.

Løsning: Vi finner først de partiellderiverte:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$
$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 2$$

For å finne koeffisientene i lineariseringen, evaluerer vi i det oppgitte punktet $(1,0)$:

$$\frac{\partial f(1,0)}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{1}} = \frac{1}{2}$$
$$\frac{\partial f(1,0)}{\partial y} = 2$$

Lineariseringen er dermed gitt ved

$$\begin{aligned} L(x,y) &= f(x_0,y_0) + \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}(x-x_0) + \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}(y-y_0) \\ &= 1 + \frac{1}{2}(x-1) + 2(y-0) \\ &= 1 + \frac{x}{2} - \frac{1}{2} + 2y \\ &= \frac{x}{2} + 2y + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

□

10.4.25 Finn den lineære tilnærmingen til

$$f(x,y) = e^{x+y}$$

i $(0,0)$, og bruk den til å finne en tilnærming til $f(0.1, 0.05)$. Sammenlign resultatet med det du finner ved bruk av kalkulator.

Løsning: Vi finner lineariseringen på samme måte som i forrige oppgave:

$$f_x(x,y) = e^{x+y}$$
$$f_y(x,y) = e^{x+y}$$

Dersom vi evaluerer i $(0,0)$ får vi

$$f_x(0,0) = e^{0+0} = 1 = f_y(0,0)$$

og lineariseringen er dermed gitt ved (merk at $f(0,0) = 1$)

$$L(x,y) = 1 + x + y$$

og

$$f(0.1, 0.05) \approx L(0.1, 0.05) = 1 + 0.1 + 0.05 = 1.15$$

Kalkulator gir

$$f(0.1, 0.05) = e^{0.1+0.05} = 1.1618\ldots$$

□

$\boxed{10.4.35}$ Finn Jacobimatrisen (den deriverte) til funksjonen

$$\mathbf{f}(x,y) = \begin{bmatrix} 2x^2y - 3y + x \\ e^x \sin y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(x,y) \\ f_2(x,y) \end{bmatrix}$$

Løsning: Vi har

$$\frac{\partial f_1(x,y)}{\partial x} = 4xy + 1$$
$$\frac{\partial f_1(x,y)}{\partial y} = 2x^2 - 3$$
$$\frac{\partial f_2(x,y)}{\partial x} = e^x \sin y$$
$$\frac{\partial f_2(x,y)}{\partial y} = e^x \cos y$$

og dermed blir

$$D\mathbf{f}(x,y) = \begin{bmatrix} 4xy + 1 & 2x^2 - 3 \\ e^x \sin y & e^x \cos y \end{bmatrix}$$

□

$\boxed{10.4.45}$ Finn lineærtilnærmingen til

$$\mathbf{f}(x,y) = \begin{bmatrix} (x-y)^2 \\ 2x^2y \end{bmatrix}$$

i punktet $(2,-3)$. Bruk resultatet til å finne en tilnærming til $f(1.9,-3.1)$, og sammenlign resultatet med det du finner ved bruk av kalkulator.

Løsning: Vi har

$$D\mathbf{f}(x,y) = \begin{bmatrix} 2(x-y) & -2(x-y) \\ 4xy & 2x^2 \end{bmatrix}$$

og

$$D\mathbf{f}(2,-3) = \begin{bmatrix} 10 & -10 \\ -24 & 8 \end{bmatrix}$$

Lineærtilnærmingen til $\mathbf{f}(x,y)$ omkring $(2,-3)$ er gitt ved

$$\begin{aligned} \mathbf{L}(x,y) = \mathbf{f}(2,-3) + D\mathbf{f}(2,-3)\begin{bmatrix} x-2 \\ y+3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 25 \\ -24 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 10 & -10 \\ -24 & 8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x-2 \\ y+3 \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} 25+10(x-2)-10(y+3) \\ -24-24(x-2)+8(y+3) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 10x-10y-25 \\ -24x+8y+48 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Det betyr at

$$L(1.9,-3.1) = \begin{bmatrix} 10\cdot 1.9 - 10\cdot(-3.1) - 25 \\ -24\cdot 1.9 + 8\cdot(-3.1) + 48 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19+31-25 \\ -45.6-24.8+48 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 \\ -22.4 \end{bmatrix}$$

Kalkulator gir

$$\mathbf{f}(1.9,-3.1) = \begin{bmatrix} 25 \\ -22.382 \end{bmatrix}$$

□

$\boxed{10.5.1}$ La $f(x,y) = x^2 + y^2$ med $x(t) = 3t$ og $y(t) = e^t$. Finn den deriverte av $w = f(x,y)$ med hensyn på t når $t = \ln 2$.

Løsning: Vi har

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial x} &= 2x \\ \frac{\partial w}{\partial y} &= 2y \\ \frac{dx}{dt} &= 3 \\ \frac{dy}{dt} &= e^t. \end{aligned}$$

Kjerneregelen gir

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{dt} = 2x \cdot 3 + 2ye^t$$

Når $t = \ln 2$ er $x(t) = 3\ln 2$ og $y(t) = e^{\ln 2} = 2$, og det følger at

$$\left.\frac{dw}{dt}\right|_{t=\ln 2} = 2 \cdot (3\ln 2) \cdot 3 + 2 \cdot 2 \cdot e^{\ln 2} = 18\ln 2 \ + 8$$

$\square$

$\boxed{10.5.5}$ La $f(x, y) = 1/x + 1/y$ med $x(t) = \sin t$ og $y(t) = \cos t$. Finn den deriverte til $w = f(x, y)$ med hensyn på t når $t = \pi/4$.

Løsning: Vi har

$$\frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{1}{x^2}$$
$$\frac{\partial w}{\partial y} = -\frac{1}{y^2}$$
$$\frac{dx}{dt} = \cos t$$
$$\frac{dy}{dt} = -\sin t$$

og kjerneregelen gir

$$\frac{dw}{dt} = -\frac{1}{x^2}\cos t + \frac{1}{y^2}\sin t$$

Når $t = \pi/4$ er $x(t) = y(t) = 1/\sqrt{2}$ slik at

$$\left.\frac{dw}{dt}\right|_{t=\pi/4} = -\frac{1}{(1/\sqrt{2})^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{(1/\sqrt{2})^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{2}{\sqrt{2}} + \frac{2}{\sqrt{2}} = 0$$

$\square$

$\boxed{10.5.11}$ Finn dy/dx dersom $\ln(x^2 + y^2) = 3xy$.

Løsning: Dersom $F(x, y) = \ln(x^2 + y^2) - 3xy$ kan ligningen skrives $F(x, y) = 0$. Vi har

$$F_x(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2} \cdot 2x - 3y$$
$$F_y(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2} \cdot 2y - 3x$$

og dermed blir

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{2x/(x^2+y^2) - 3y}{2y/(x^2+y^2) - 3x} = \frac{3y(x^2+y^2) - 2x}{3x(x^2+y^2) - 2y}$$

□

$\boxed{10.5.19}$ Finn gradienten til

$$f(x,y) = \sqrt{x^3 - 3xy}$$

Løsning: Vi har

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{x^3-3xy}} \cdot (3x^2 - 3y) = \frac{3x^2 - 3y}{2\sqrt{x^3 - 3xy}}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{x^3-3xy}} \cdot (-3x) = \frac{-3x}{2\sqrt{x^3 - 3xy}}$$

Da er

$$\nabla f(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{3x^2-3y}{2\sqrt{x^3-3xy}} \\ \frac{-3x}{2\sqrt{x^3-3xy}} \end{bmatrix}$$

□

$\boxed{10.5.31}$ Regn ut den retningsderiverte i til $f(x,y) = 2x^2y - 3x$ i punktet $(2,1)$ i retning mot punktet $(3,2)$.

Løsning: Vi regner først ut gradienten

$$\nabla f(x,y) = \begin{bmatrix} 4xy - 3 \\ 2x^2 \end{bmatrix}$$

som evaluert i punktet $(2,1)$ er

$$\nabla f(2,1) = \begin{bmatrix} 4 \cdot 2 \cdot 1 - 3 \\ 2 \cdot 2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \end{bmatrix}$$

Retningsvektoren fra $(2,1)$ til $(3,2)$ er $(1,1)$, og enhetsvektoren i den retningen er

$$\mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(Lengden er $\sqrt{2}$). Den retningsderiverte i retningen $\mathbf{u}$ er dermed gitt ved

$$D_{\mathbf{u}} f(2,1) = \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}(5 \cdot 1 + 8 \cdot 1) = \frac{13}{\sqrt{2}}$$

□

$\boxed{10.5.41}$ Finn en enhetsvektor som er normal til nivåkurven til funksjonen

$$f(x,y) = x^2 - y^3$$

i punktet $(1,3)$.

Løsning: Vi vet at gradientvektoren alltid står normalt (vinkelrett) på nivåkurven gjennom det aktuelle punktet. Så oppgaven kan løses ved simpelthen å regne ut gradientvektoren til f i $(1,3)$ og deretter normalisere den; vi har

$$\nabla f(x,y) = \begin{bmatrix} 2x \\ -3y^2 \end{bmatrix}$$

og

$$\nabla f(1,3) = \begin{bmatrix} 2 \cdot 1 \\ -3 \cdot 3^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -27 \end{bmatrix}$$

Siden

$$|\nabla f(1,3)| = \sqrt{2^2 + (-27)^2} = \sqrt{733}$$

blir vektoren vi er ute etter

$$\frac{\nabla f(1,3)}{|\nabla f(1,3)|} = \frac{1}{\sqrt{733}} \begin{bmatrix} 2 \\ -27 \end{bmatrix}$$

□