



Løsningsforslag, eksamen i MA0002,
Brukerkurs i matematikk B

Oppgave 1 En parametrisk linje L og et plan P (i rommet) er gitt ved ligningene

$$\begin{aligned}x &= 1 + 3t \\y &= 2 + 2t \\z &= 3 + t\end{aligned}$$

og

$$5x + 4y + 3z = 2.$$

Finn skjæringspunktet mellom P og L .

Løsning: Vi setter ligningene som beskriver linjen inn i ligningen som beskriver planet, og løser for t :

$$\begin{aligned}5(1 + 3t) + 4(2 + 2t) + 3(3 + t) &= 2 \\5 + 15t + 8 + 8t + 9 + 3t &= 2 \\26t + 22 &= 2 \\26t &= -20 \\t &= -\frac{20}{26} = -\frac{10}{13}\end{aligned}$$

Vi finner deretter skjæringspunktet ved å sette verdien for t inn i ligningene for linjen:

$$\begin{aligned}x &= 1 + 3t = 1 - \frac{30}{13} = -\frac{17}{13} \\y &= 2 + 2t = 2 - \frac{20}{13} = \frac{6}{13} \\z &= 3 + t = 3 - \frac{10}{13} = \frac{29}{13}\end{aligned}$$

□

Oppgave 2 La

$$f(x, y) = \frac{1}{3}x^3 + xy + \frac{1}{3}y^3$$

- a) Regn ut gradienten ∇f til f . Finn den retningsderiverte til f i punktet $(0, 1)$ i retning $[2, -1]$.

Løsning: Vi finner at

$$\nabla f(x, y) = \begin{bmatrix} x^2 + y \\ y^2 + x \end{bmatrix}$$

For å regne ut den retningsderiverte, trenger vi først en enhetsvektor $\mathbf{u}$ i retning $\mathbf{v} = [2, -1]$. Vi har

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}$$

så

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Da blir

$$D_{\mathbf{u}}f(0, 1) = \nabla f(0, 1) \cdot \mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{2-1}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

□

- b) Finn alle de kritiske punktene til f , og avgjør om de er lokale maksima, lokale minima eller sadelpunkter.

Løsning: Vi har $\nabla f(x, y) = 0$ hvis og bare hvis $y^2 + x = 0$ og $x^2 + y = 0$. Første ligning gir $x = -y^2$ som innsatt i andre ligning gir

$$x^2 + y = (-y^2)^2 + y = y^4 + y = y(y^3 + 1) = 0$$

så $y = 0$ (som medfører $x = 0$) eller $y^3 = -1$, altså $y = -1$ (som medfører $x = -(-1)^2 = -1$). Det betyr at de kritiske punktene er $(0, 0)$ og $(-1, -1)$. Vi klassifiserer dem ved å regne ut Hesse-matrisen til f i hvert punkt; vi har

$$\text{Hess } f(x, y) = \begin{bmatrix} 2x & 1 \\ 1 & 2y \end{bmatrix}$$

og dermed blir

$$\text{Hess } f(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Vi har $\det \text{Hess } f(0,0) = -1 < 0$, som betyr at $(0,0)$ er et sadelpunkt. Videre blir

$$\text{Hess } f(-1,-1) = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

og $\det \text{Hess } f(-1,-1) = 3 > 0$ og $\text{tr Hess } f(-1,-1) = -4$ som betyr at $(-1,-1)$ er et lokalt maksimum. $\square$

Oppgave 3 La

$$A_c = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & c & 0 \\ -c & 0 & c \end{bmatrix},$$

der c er et tall.

- a) Regn ut determinanten $\det A_c$ til A_c . Forklar hvorfor A er invertibel hvis og bare hvis $c \neq 0$ og $c \neq \frac{1}{2}$.

Løsning: Vi regner ut determinanten etter første rad, som gir

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & c & 0 \\ -c & 0 & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -c & c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & c \\ -c & 0 \end{vmatrix} = c^2 - c + c^2 = 2c^2 - c = c(2c - 1)$$

Vi ser at determinanten $\det A_c = 0$ hvis og bare hvis $c = 0$ eller $2c = 1$, altså $c = 1/2$. Det betyr at A_c er invertibel hvis og bare hvis $c \neq 0$ og $c \neq \frac{1}{2}$. $\square$

- b) Bruk elementære radoperasjoner til å vise at

$$A_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Løsning: Dette gjøres ved å stille opp matrisen $[A_1 | I]$ og utføre elementære radoperasjoner til vi står igjen med I i kolonnene til venstre. Vi står da igjen med A_1^{-1} i kolonnene til høyre, altså $[I | A_1^{-1}]$.

$$\begin{aligned}
& \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right] \\
& \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right] \\
& \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right]
\end{aligned}$$

□

c) Løs ligningssystemet

$$A_1^{-1} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Løsning: Dette gjøres trolig enklest ved å legge merke til at $(A_1^{-1})^{-1} = A_1$, slik at

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = A_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

altså $x = 2$, $y = 2$ og $z = -1$.

□

Oppgave 4 Finn alle likevektspunkter til systemet

$$\begin{bmatrix} dx/dt \\ dy/dt \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^2 + y \\ y^2 + x \end{bmatrix}$$

og avgjør om de er stabile eller ustabile.

Løsning: La

$$\mathbf{g}(x, y) = \begin{bmatrix} x^2 + y \\ y^2 + x \end{bmatrix}$$

Vi har at $\mathbf{g}(x, y) = \mathbf{0}$ hvis og bare hvis $(x, y) = (0, 0)$ eller $(x, y) = (-1, -1)$ (dette er gradienten til $f(x, y)$ fra oppgave 2, så likevektspunktene til dette systemet er de samme som de kritiske punktene for $f(x, y)$). Videre finner vi at

$$D\mathbf{g}(x, y) = \begin{bmatrix} 2x & 1 \\ 1 & 2y \end{bmatrix}$$

og

$$D\mathbf{g}(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Siden $\det D\mathbf{g}(0,0) = -1 < 0$, må egenverdiene ha motsatt fortegn (de kan ikke være komplekse i dette tilfellet), og det betyr at $(0,0)$ er et ustabilt likevektspunkt (litt regning avslører at egenverdiene er 1 og -1). Videre blir

$$D\mathbf{g}(-1,-1) = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

og vi har $\det D\mathbf{g}(-1,-1) = 3 > 0$ og $\text{tr } D\mathbf{g}(-1,-1) = -4$ som betyr at begge egenverdiene har negativ realdel og $(-1,-1)$ er dermed et stabilt likevektspunkt (litt mer regning avslører at egenverdiene er -1 og -3 , altså er begge reelle). $\square$

Oppgave 5

a) Finn

$$\int x \cos x \, dx$$

ved delvis integrasjon.

Løsning: Vi velger $u = x$ og $v' = \cos x$, som gir $u' = 1$ og $v = \sin x$. Det gir

$$\int x \cos x \, dx = x \sin x - \int \sin x \, dx = x \sin x + \cos x + C$$

$\square$

b) Finn

$$\int \cos \sqrt{x} \, dx$$

ved substitusjon.

Løsning: La $u = \sqrt{x}$. Det gir

$$du = \frac{dx}{2\sqrt{x}} \quad \implies \quad 2\sqrt{x} \, du = 2u \, du = dx$$

som betyr at

$$\int \cos \sqrt{x} \, dx = 2 \int u \cos u \, du$$

og sistnevnet integral har vi løst over. Det betyr at

$$\int \cos \sqrt{x} \, dx = 2 \int u \cos u \, du = 2u \sin u + 2 \cos u + C = 2\sqrt{x} \sin \sqrt{x} + \cos \sqrt{x} + C$$

□

Oppgave 6 En sylinderformet vanntank med grunnflate på 1 m^2 og høyde 4 m fylles helt opp med vann. Vannet renner ut gjennom et lite hull (med grunnflate 1 cm^2) i bunnen av tanken. Det kan vises ved hjelp av Toricelli's lov at vannstanden (i meter) $y(t)$ i tanken etter t sekunder oppfyller differensialligningen

$$\frac{dy}{dt} = -k\sqrt{y}$$

der $k \approx 4.43 \cdot 10^{-4}$ er en konstant. Hvor lang tid tar det før alt vannet har rent ut?

Løsning: Vi begynner med å løse differensialligningen; den er separabel og kan omformes til følgende integralligning

$$\int \frac{dy}{\sqrt{y}} = - \int k \, dt$$

som gir

$$2\sqrt{y(t)} = -kt + C \quad (1)$$

eller

$$y(t) = \frac{(-kt + C)^2}{4}$$

Ved tid $t = 0$ er vannstanden $y(t)$ lik 4 m , så

$$4 = \frac{C^2}{4}$$

som betyr at $C = 4$ (ligningen har egentlig to løsninger, $C = \pm 4$, men $C = -4$ vil gi $4y(t) = (-kt - 4)^2 = (kt + 4)^2$ altså en vannstand som øker med tiden). Når alt vannet har rent ut er vannstanden $y(t)$ er lik 0 , og det er lett å se at dette inntreffer når

$$-kt + 4 = 0 \quad \implies \quad t = \frac{4}{k} \approx 9029 \text{ sek}$$

eller ca. 2.5 timer.

□