Løsning av 2×2-systemer med komplekskonjugerte egenverdier

Martin Wanvik

April 24, 2013

1 Litt om komplekse tall

Vi begynner med å minne om formelen for å finne røttene til et andregradspolynom: ligningen $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ har løsninger

$$\lambda = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2}$$

Dette gir et reelt tall hvis og bare hvis $a^2 - 4b \geq 0$; det finnes f.eks ikke noe reelt tall som oppfyller $\lambda^2 + 1 = 0$, siden $\lambda^2 \geq 0$ for alle reelle λ. Men det utelukker ikke at det kan finnes andre tallsystemer der slike polynomer har røtter. La oss innføre $i = \sqrt{-1}$ (som ikke er et reelt tall) - dette kalles den *imaginære enheten*, og et tall på formen ai kalles et *imaginært tall*. Dersom $a^2 - 4b < 0$ kan vi skrive

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2} = \frac{-a}{2} \pm \sqrt{-1}\frac{\sqrt{4b - a^2}}{2} \\ &= \frac{-a}{2} \pm i\frac{\sqrt{4b - a^2}}{2} \end{aligned}$$

Vi har brukt at $\sqrt{-a} = \sqrt{(-1) \cdot a} = \sqrt{-1}\sqrt{a}$. Her blir $\sqrt{4b - a^2}$ reelt siden $4b - a^2 > 0$, og vi har dermed å gjøre med tall på formen $z = a + ib$, der a, b er reelle tall. Dette kalles et *komplekst tall*, fordi det er sammensatt av to deler, *realdelen* $a =: \mathrm{Re}(z)$ og *imaginærdelen* $b =: \mathrm{Im}\, z$. To komplekse tall $a + bi$ og $c + di$ adderes på samme måte som vektorene $\begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix}'$ og $\begin{bmatrix} c & d \end{bmatrix}'$. F.eks er

$$(2 + 3i) + (1 + i) = (2 + 1) + (3 + 1)i = 3 + 4i$$

Multiplikasjon er litt vanskeligere, men ikke så veldig - vi regner ut produktet $(a + bi)(c + di)$ på samme måte som ganger sammen vanlige parantesuttrykk, samtidig som vi husker på at $i^2 = -1$. F.eks er

$$\begin{aligned} (1 + i)(2 - 3i) &= 1 \cdot 2 + i \cdot 2 + 1 \cdot (-3i) - 3 \cdot i^2 = 2 + 2i - 3i - 3 \cdot (-1) \\ &= (2 - (-3)) + (2 - 3)i = 5 - i \end{aligned}$$

De komplekse tallene $\mathbb{C}$ inkluderer de reelle tallene, altså alle tall på formen $a + 0i$ (multiplikasjonen og addisjon stemmer også overens med det vi kjenner fra tidligere).

Over innførte vi simpelthen $i = \sqrt{-1}$ uten noen videre kommentar, og man kan spørre seg om dette virkelig er meningsfylt. For de som ikke er overbeviste, nevner vi hvordan de komplekse tallene faktisk kan *konstrueres*. Vi tar utgangspunkt i planet $\mathbb{R}^2$, og innfører vanlig vektoraddisjon samt multiplikasjon definert ved

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ac - bd \\ ad + bc \end{bmatrix}$$

Merk at

$$\begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ac \\ 0 \end{bmatrix}$$

så multiplikasjon av to reelle tall forblir den samme. Dersom vi skriver $i = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, ser vi at

$$i^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Med andre ord, $i = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}' = \sqrt{-1}$.

Multiplikasjon og addisjon oppfyller alle de kjente reglene vi bruker for reelle tall (inkludert den kommutative loven, $z_1 z_2 = z_2 z_1$) Vi kan også dividere to komplekse tall med hverandre, såfremt nevneren er forskjellig fra 0 (altså $0 + 0i$ for å være mer presis), men denne operasjonen kommer vi ikke til å trenge.

De komplekse tallene ligger ikke lenger langs en linje, slik de reelle tallene gjør, men i et *plan*, kalt *det komplekse planet* $\mathbb{C}$.

Før vi avslutter dette avsnittet, trenger vi en siste operasjon, som ikke har noen reell analog, nemlig komplekskonjugasjon. Dersom $z = a + bi$, definerer vi z's komplekskonjugerte $\bar{z}$ ved $\bar{z} = a - ib$. F.eks $\overline{1 + i} = 1 - i$ og $\overline{2 - 3i} = 2 + 3i$. Realdelen forblir altså den samme, mens imaginærdelen endrer fortegn. Dette svarer til en refleksjon/speiling om x-aksen i planet. Tall som ligger langs x-aksen (altså de reelle tallene) blir altså værende der de er, siden den komplekskonjugerte har samme realdel som det opprinnelige tallet.

Ikke overraskende er $\bar{\bar{z}} = z$. Røttene til et andregradspolynom opptrer alltid i par, der den ene roten er den komplekskonjugerte til den andre, f.eks har polynomet $\lambda^2 - 4\lambda + 5$ røttene

$$\lambda = \frac{4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 5}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{-4}}{2} = 2 \pm 2i$$

Vi nevner også at dersom z er et komplekst tall, så er $z + \bar{z}$ alltid reelt (dersom $z = a + ib$ er $z + \bar{z} = (a + bi) + (a - bi) = 2a$), samt at $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}$.

2 Løsning av systemer av lineære differensialligninger med komplekse egenverdier

Vi har studert systemer av differensialligninger på formen

$$\begin{bmatrix} dx_1/dt \\ dx_2/dt \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

eller

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = A\mathbf{x}(t) \tag{1}$$

og sett at dersom A har distinkte, reelle egenverdier, så kan løsningene skrives

$$\mathbf{x}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}\mathbf{u}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t}\mathbf{u}_2 \tag{2}$$

der λ_1, λ_2 er A's egenverdier og $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ er tilhørende egenvektorer. Vi skal nå ta for oss tilfellet der A har komplekskonjugerte egenverdier, og skrive ned løsningen for det tilfellet. Det skal vise seg at løsningene faktisk kan skrives på nøyaktig samme form, men problemet er da at løsningene ikke nødvendigvis blir reelle. Å rette opp det problemet er det som kommer til å oppta hoveddelen av (resten av) notatet.

Men la oss begynne med et mer nærliggende spørsmål: dersom egenverdiene λ_1, λ_2 er komplekse, hva skal $e^{\lambda t}$ bety? Dersom $\lambda = a + bi$, bør vi allefall ha

$$e^{\lambda t} = e^{(a+ib)t} = e^{at}e^{ibt}$$

siden dette er det vi forventer av den vanlige reelle eksponensialfunksjonen. Det er altså tilstrekkelig for oss å bestemme oss for hva e^{ib} skal være for noe, for et reelt tall b. Det skal vise seg at

$$e^{ib} = \cos b + i \sin b \tag{3}$$

er det korrekte svaret, men vi skal ikke engang prøve å rettferdiggjøre denne formelen (men vi kan nevne at det er *svært* gode grunner til at den er slik den er, samt opplyse om at det er enkelt å sjekke at resultatene vi får er korrekte). Ligning (3) kalles Euler's formel.

Det neste vi trenger er egenvektorer. Utregningene foregår på samme måte som tidligere, bortsett fra at vi jobber med komplekse tall. Vi tar et eksempel som illustrerer metoden. La

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Vi har tr $A = 4$ og det $A = 5$, så vi får

$$\det(A - \lambda I) = \lambda^2 - 4\lambda + 5$$

Røttene til dette polynomet (egenverdiene) blir

$$\lambda = \frac{4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 5}}{2} = 2 \pm i$$

Vi setter $\lambda = 2 + i$ og løser ligningssystemet $(A - \lambda I)\mathbf{w} = 0$, altså

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 2 - (2+i) & 1 \\ -1 & 2 - (2+i) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -i & -1 \\ -1 & -i \end{bmatrix}$$

Vi kan løse systemet ved å gange andre rad med i, som gir

$$\begin{bmatrix} -i & 1 \\ -i & -i^2 = -(-1) = 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} i & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dersom $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} w_1 & w_2 \end{bmatrix}'$, så må vi altså ha $iw_1 - w_2 = 0$ eller $iw_1 = w_2$, og vi kan f.eks velge $w_1 = 1$, som gir $w_2 = i$, altså er

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

en egenvektor tilhørende $\lambda = 2 + i$. Det skal vise seg at vi ikke trenger å regne ut noen egenvektor for $\overline{\lambda} = 2 - i$ separat - det skal vise seg at dersom $\mathbf{w} = \mathbf{u} + i\mathbf{v}$ for *reelle vektorer* $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ er en egenvektor tilhørende egenverdien λ, da er $\overline{\mathbf{w}} = \mathbf{u} - i\mathbf{v}$ en egenvektor tilhørende egenverdien $\overline{\lambda}$. Altså er

$$\overline{\mathbf{w}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} - i \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$$

en egenvektor tilhørende egenverdien $\lambda = 2 - i$. Dette er ikke vanskelig å se. Med $\lambda = 2 - i$ blir

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 2 - (2 - i) & 1 \\ -1 & 2 - (2 - i) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i & 1 \\ -1 & i \end{bmatrix}$$

Multiplikasjon med $-i$ i andre rad gir

$$\begin{bmatrix} i & 1 \\ i & -i^2 = 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} i & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

altså må komponentene $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} w_1 & w_2 \end{bmatrix}'$ oppfylle $iw_1 = -w_2$ eller $-iw_1 = w_2$. Dersom vi velger $w_1 = 1$ blir $w_2 = -i$, altså er

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} - i \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

som var det vi skulle vise.

Det er altså tilstrekkelig å finne en egenvektor $\mathbf{w} = \mathbf{u} + i\mathbf{v}$ tilhørende en av egenverdiene λ, og dermed er $\overline{\mathbf{w}} = \mathbf{u} - i\mathbf{v}$ egenvektoren tilhørende egenverdien $\overline{\lambda}$. Dermed kan løsningen (2) skrives

$$\mathbf{x}(t) = c_1 e^{\lambda t}\mathbf{w} + c_2 e^{\overline{\lambda} t}\overline{\mathbf{w}} \tag{4}$$

der c_1, c_2 er vilkårlige komplekse konstanter. Generelt er $\mathbf{x}(t)$ en kompleks vektor, noe som ikke er ønskelig. Det viser seg at $\mathbf{x}(t)$ er en reell vektor for alle t hvis og bare hvis $c_1 = \overline{c_2}$ (husk at $z + \overline{z}$ alltid er reell, og at $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}$), og svaret blir dermed

$$\mathbf{x}(t) = 2\,\mathrm{Re}(c_1 e^{\lambda t}\mathbf{w}\ ) = \mathrm{Re}(C e^{\lambda t}\mathbf{w}) \tag{5}$$

der $C = 2c_1$ er en vilkårlig kompleks konstant. Dersom vi skriver $C = C_1 - iC_2$, blir (5)

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= \mathrm{Re}((C_1 - iC_2)e^{\lambda t}\mathbf{w}) = \mathrm{Re}(C_1 e^{\lambda t}\ \mathbf{w}) + \mathrm{Re}(-iC_2 e^{\lambda t}\mathbf{w}) \\ &= C_1\,\mathrm{Re}(e^{\lambda t}\mathbf{w}) + C_2\,\mathrm{Re}(-ie^{\lambda t}\mathbf{w}) \end{aligned}$$

Dersom $z = a + ib$ så er

$$\mathrm{Re}(-iz) = \mathrm{Re}(-i(a + ib)) = \mathrm{Re}(-(ia - b)) = b = \mathrm{Im}\,z$$

så vi kan skrive

$$\mathbf{x}(t) = C_1 \operatorname{Re}(e^{\lambda t}\mathbf{w}) + C_2 \operatorname{Im}(e^{\lambda t}\mathbf{w}) \tag{6}$$

der C_1, C_2 er *reelle konstanter*. Det er altså tilstrekkelig for oss å regne ut realdelen og imaginærdelen til $e^{\lambda t}\mathbf{w}$, noe som ikke er altfor vanskelig; vi skriver $\lambda = a + ib$ og $\mathbf{w} = \mathbf{u} + i\mathbf{v}$, som gir

$$\begin{aligned} e^{\lambda t}\mathbf{w} &= e^{at}(\cos bt + i \sin bt)(\mathbf{u} + i\mathbf{v}) \\ &= e^{at}(\mathbf{u}\cos bt + i\mathbf{u}\sin bt + i\mathbf{v}\cos bt - \mathbf{v}\sin bt) \\ &= e^{at}\ (\mathbf{u}\cos bt - \mathbf{v}\sin bt) + ie^{at}(\mathbf{u}\sin bt + \mathbf{v}\cos bt) \end{aligned}$$

Dermed blir

$$\operatorname{Re} e^{\lambda t}\mathbf{w} = e^{at}(\mathbf{u}\cos bt - \mathbf{v}\sin bt)$$

og

$$\operatorname{Im} e^{\lambda t}\mathbf{w} = e^{at}(\mathbf{u}\sin bt + \mathbf{v}\cos bt)$$

Vi oppsummerer det vi har funnet i følgende teorem:

Teorem 1. *Dersom A er en 2×2-matrise med komplekskonjugerte egenverdier $\lambda = a \pm bi$, med tilhørende egenvektorer $\mathbf{w} = \mathbf{u} \pm i\mathbf{v}$, da kan enhver løsning av*

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = A\mathbf{x}(t)$$

skrives på formen

$$\mathbf{x}(t) = C_1 e^{at}(\mathbf{u}\cos bt - \mathbf{v}\sin bt) + C_2 e^{at}(\mathbf{u}\sin bt + \mathbf{v}\cos bt) \tag{7}$$

der C_1, C_2 er (reelle) konstanter.

Som et eksempel kan vi fullføre utregningen fra tidligere; vi hadde

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

med egenverdier $\lambda = 2 \pm i$ (altså $a = 2$ og $b = 1$) og tilhørende egenvektorer

$$\mathbf{w} = \mathbf{u} \pm i\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \pm i \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Vi nevner i forbifarten at siden $a > 0$ er origo en ustabil spiral i dette eksemplet. Løsningen kan ifølge (7) skrives

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= C_1 e^{2t} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cos t - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \sin t \right) + C_2 e^{2t} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \sin t + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\ \cos t \right) \\ &= e^{2t} \begin{bmatrix} C_1 \cos t + C_2 \sin t \\ -C_1 \sin t + C_2 \cos t \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Vi har

$$\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix}$$

så verdiene av C_1 og C_2 er nettopp koordinatene til punktet løsningen passerer ved $t = 0$. Dette garanterer at vi har funnet en løsning som går gjennom hvert punkt i planet.