

# Trigonometriske funksjoner (notat til MA0003)

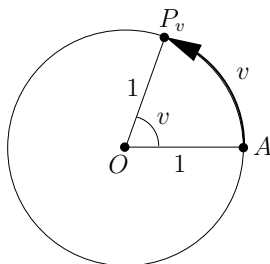
10. mars 2005

## Radianer

Gitt et punkt  $A$  på en sirkel med radius 1 og sentrum  $O$ . La punktet  $P_v$  flytte seg fra punktet  $A$  slik at det beveger seg langs en sirkelbue av lengde  $v$ . Se figur 1. Da sier vi at vinkelen  $\angle AOP_v$  er en vinkel på  $v$  radianer. Altså:

$$\angle AOP_v = v \text{ radianer.}$$

Vi kan gjerne si: “En vinkel på  $v$  radianer er vinkelen som skjærer ut en bue av



Figur 1: Radianer

lengde  $v$  på en sirkel med radius 1.”

Hvis  $P_v$  beveger seg en hel gang rundt sirkelen svarer det til en vinkel på  $360^\circ$ . Hele omkretsen av sirkelen har en lengde på  $2\pi$ , så  $2\pi$  radianer svarer til  $360^\circ$ . Altså:

$$360^\circ = 2\pi \text{ radianer, eller } 1^\circ = \frac{2\pi}{360} \text{ radianer.}$$

### Eksempel

Uttrykk  $45^\circ$  i radianer.

Løsning:  $45^\circ = 45 \cdot 1^\circ = 45 \cdot \frac{2\pi}{360}$  radianer. Derfor er

$$45^\circ = \frac{90}{360}\pi \text{ radianer} = \frac{\pi}{4} \text{ radianer.}$$

□

### Eksempel

Hvor mange grader tilsvarer en vinkel på  $\frac{\pi}{3}$  radianer?

Løsning:  $360^\circ = 2\pi$  radianer, så

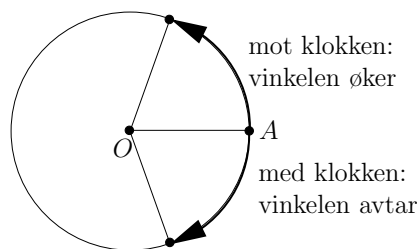
$$1 \text{ radian} = \frac{360^\circ}{2\pi}.$$

Da er

$$\frac{\pi}{3} \text{ radianer} = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{360^\circ}{2\pi} = 60^\circ.$$

□

Vi kommer til å bruke positive og negative vinkler. En positiv vinkel  $v$  svarer til at vi beveger oss mot klokken i figur 1. En negativ vinkel får vi om vi beveger oss med klokken. Se figur 2.



Figur 2: Positive og negative vinkler

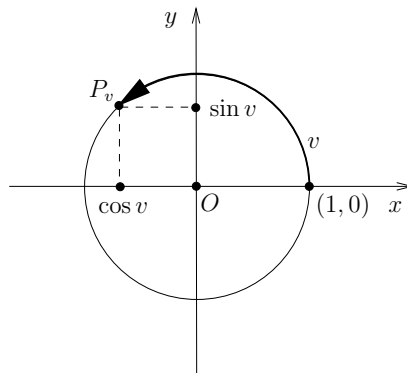
## Sinus og cosinus: funksjonene $\sin x$ og $\cos x$

Vi ser på en sirkel i et koordinatsystem, med radius 1 og med sentrum i origo. Sett nå at punktet  $P_v$  flytter seg fra punktet  $(1, 0)$  langs en sirkelbue av lengde  $v$ . Se figur 3.  $P_v$  har koordinatene  $(x, y)$ :

$$P_v = (x, y).$$

Annenkoordinaten ( $y$ -koordinaten) til  $P_v$  kalles for *sinus* til tallet  $v$ . Vi skriver:

$$y = \sin v.$$



Figur 3: Sinus og cosinus

Førstekoordinaten ( $x$ -koordinaten) til  $P_v$  kalles for *cosinus* til  $v$ :

$$x = \cos v.$$

Dermed er

$$P_v = (\cos v, \sin v).$$

### Eksempel

Vi finner sinus og cosinus til  $v = \frac{\pi}{2}$  radianer.

*Løsning:*  $v = \frac{\pi}{2}$  radianer svarer til en vinkel på  $90^\circ$ , en rett vinkel. Dermed ligger  $P_{\frac{\pi}{2}}$  på  $y$ -aksen, i punktet  $(0, 1)$ . Derfor er

$$P_{\frac{\pi}{2}} = \left(\cos \frac{\pi}{2}, \sin \frac{\pi}{2}\right) = (0, 1),$$

og

$$\sin \frac{\pi}{2} = 1, \quad \cos \frac{\pi}{2} = 0.$$

□

Siden  $(\cos v, \sin v)$  er et punkt på sirkelen med radius 1 om origo, ser vi at

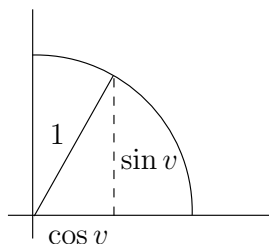
$$-1 \leq \cos v \leq 1$$

$$-1 \leq \sin v \leq 1$$

uansett hvilken vinkel  $v$  vi velger. Her er en annen viktig ting. Sinus og cosinus er *katetene* i en rettvinklet trekant med hypotenus lik 1. Ved å bruke Pytagoras' setning får vi:

$$(\cos v)^2 + (\sin v)^2 = 1^2 = 1.$$

Se figur 4.



Figur 4: Hypotenusen er 1

## Periodisitet

En funksjon  $f$  er *periodisk* med periode  $T$  dersom

$$f(x) = f(x + T)$$

for hver  $x$ .

Sett at punktet  $P_v$  i figur 3 flytter seg en hel gang rundt sirkelen, slik at det kommer tilbake til utgangspunktet. Selv om radiantallet øker med  $2\pi$ , er punktet det samme:

$$P_v = P_{v+2\pi}.$$

Da er også koordinatene de samme, slik at

$$(\cos v, \sin v) = (\cos(v + 2\pi), \sin(v + 2\pi)).$$

Dermed får vi:

$$\sin v = \sin(v + 2\pi)$$

$$\cos v = \cos(v + 2\pi).$$

Det betyr at  $\sin v$  og  $\cos v$  begge er periodiske funksjoner med periode  $2\pi$ .

Vi kan gå rundt sirkelen - med eller mot klokken - så mange hele omdreininger vil vi: vi ender uansett opp der vi startet. Derfor er

$$\sin v = \sin(v + n \cdot 2\pi)$$

$$\cos v = \cos(v + n \cdot 2\pi)$$

for alle hele tall ("omdreininger")  $n = \pm 1, \pm 2, \pm 3 \dots$

### Eksempel

Finn  $\sin(\frac{5\pi}{2})$  og  $\cos(\frac{5\pi}{2})$ .

*Løsning:* Ovenfor så vi at  $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$  og  $\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$ . Siden  $\frac{5\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + 2\pi$  får vi, ved å huske på at  $\sin$  og  $\cos$  er periodiske med periode  $2\pi$ ,

$$\sin(\frac{5\pi}{2}) = \sin(\frac{\pi}{2} + 2\pi) = \sin(\frac{\pi}{2}) = 1$$

$$\cos\left(\frac{5\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

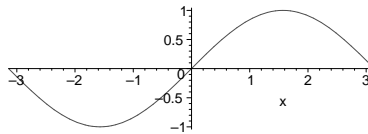
□

## Grafene til $f(x) = \sin x$ og $g(x) = \cos x$

(NB: her bruker vi  $x$  som variabel i stedet for  $v$ !)

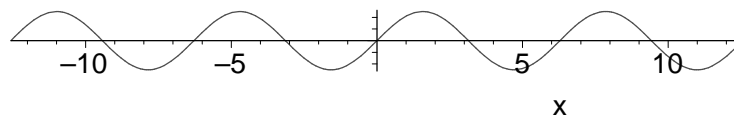
For å tegne grafen til  $f(x) = \sin x$  lager vi en verditabell. Husk å sette kalkulatoren til *radianer*, ellers går det galt!

$x$	$\sin x$
$-\pi$	0
$-3\pi/4$	$-\sqrt{2}/2 \approx -0,707$
$-\pi/2$	-1
$-\pi/4$	$-\sqrt{2}/2 \approx -0,707$
0	0
$\pi/4$	$\sqrt{2}/2 \approx 0,707$
$\pi/2$	1
$3\pi/4$	$\sqrt{2}/2 \approx 0,707$
$\pi$	0



Figur 5: Grafen til  $f(x) = \sin x$

Hvis vi vil vite hvordan denne grafen blir for flere  $x$ -verdier trenger vi ikke å regne ut funksjonsverdiene. Vi vet jo at  $f(x) = \sin x$  er periodisk, så vi kan bare “kopiere” grafen inn bortover  $x$ -aksen så mange ganger vi vil.

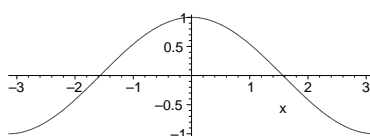


Figur 6: Grafen til  $f(x) = \sin x$  i et litt større intervall

På samme måte som for  $\sin x$  kan vi lage en verditabell for  $g(x) = \cos(x)$ :

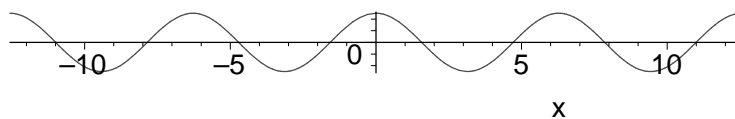
$x$	$\cos x$
$-\pi$	$-1$
$-3\pi/4$	$-\sqrt{2}/2 \approx -0,707$
$-\pi/2$	$0$
$-\pi/4$	$\sqrt{2}/2 \approx 0,707$
$0$	$1$
$\pi/4$	$\sqrt{2}/2 \approx 0,707$
$\pi/2$	$0$
$3\pi/4$	$-\sqrt{2}/2 \approx -0,707$
$\pi$	$-1$

Grafen til  $g(x) = \cos x$  kan du finne i figur 7. Funksjonen  $g(x) = \cos x$  er også



Figur 7: Grafen til  $g(x) = \cos x$

periodisk, så igjen er det lett å tegne grafen for flere  $x$ -verdier. Se figur 8.



Figur 8: Grafen til  $f(x) = \cos x$  i et litt større intervall

## Tangens

*Tangens* til  $x$  defineres som

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

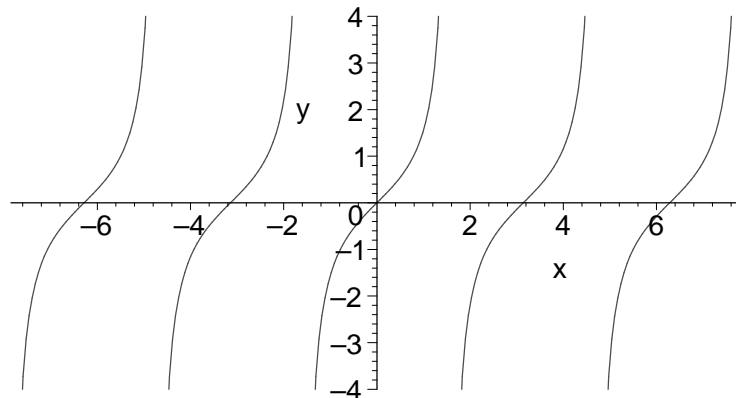
Funksjonen  $\tan x$  er ikke definert der  $\cos x = 0$ . Den er altså ikke definert for

$$x = \pm \frac{\pi}{2}, \pm \frac{3\pi}{2}, \dots$$

Tangens er en periodisk funksjon med periode  $\pi$ :

$$\tan x = \tan(x + \pi).$$

Linjene  $x = \pm \frac{\pi}{2}, \pm \frac{3\pi}{2}, \pm \frac{5\pi}{2}, \dots$  er *asymptoter* for  $\tan x$ . Se figur 9.



Figur 9: Grafen til  $f(x) = \tan x$  i intervallet  $(-\frac{5\pi}{2}, \frac{5\pi}{2})$

## Oppgaver

### Oppgave 1

Regn om  $30^\circ$  til radianer.

### Oppgave 2

Regn om  $135^\circ$  til radianer.

### Oppgave 3

Finn vinkelen som svarer til  $\pi/6$  radianer.

### Oppgave 4

Finn vinkelen som svarer til  $7\pi/8$  radianer.

### Oppgave 5

Finn verdiene av  $\sin(3\pi/2)$  og  $\cos(3\pi/2)$ . Finn deretter verdiene av  $\sin(7\pi/2)$  og  $\cos(7\pi/2)$ .

### Oppgave 6

Hvis vi vet at  $\sin(\pi/6) = 1/2$ , hva blir da  $\cos(\pi/6)$ ? (Hint: bruk at  $(\cos x)^2 + (\sin x)^2 = 1$ .)

**Oppgave 7**

Hvis vi vet at  $\cos(\pi/4) = \sqrt{2}/2$ , hva blir da  $\sin(\pi/4)$ ? (Samme hint som i oppgave 6.)

**Oppgave 8**

Finn  $\tan 0$ ,  $\tan(\pi/6)$  og  $\tan(\pi/4)$ . (Bruk svarene fra 6 og 7.)