

Notat om polynomdivisjon, MA0003, Høst 2007

Polynomdivisjon er litt teknisk og lar seg kanskje enklest forklare med et eksempel.

Anta vi ønsker å skrive

$$f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x - 1}$$

på en litt annen måte. Det vil si vi ønsker å finne en funksjon g slik at

$$(x - 1)g(x) = x^2 + x - 1$$

Det første vi ser er at funksjonen g i alle fall må inneholde et ledd x hvis vi skal ha noen sjanse for komme frem til leddet x^2 på venstresiden, som jo allerede opptrer på høyresiden. Derfor tipper vi at $g(x) = x + r_1(x)$, der $r_1(x)$ er en ny og forhåpentligvis enklere funksjon. Vi beregner:

$$\begin{aligned}(x - 1)(x + r_1(x)) &= x^2 + x + 1 \\ x^2 - x + (x - 1)r_1(x) &= x^2 + x + 1 \\ (x - 1)r_1(x) &= 2x + 1\end{aligned}$$

Siste linje minner i stor grad om vårt opprindelige problem, og vi anvender samme strategi for å finne et uttrykk for $r_1(x)$. Vi ser at hvis vi skal få et ledd $2x$ må $r_1(x)$ ha formen $2 + r_2(x)$ der $r_2(x)$ er en ny og igjen forhåpentligvis endda enklere funksjon. Vi beregner:

$$\begin{aligned}(x - 1)(2 + r_2(x)) &= 2x + 1 \\ 2x - 2(x - 1)r_2(x) &= 2x + 1 \\ (x - 1)r_2(x) &= 3 \\ r_2(x) &= \frac{3}{x - 1}\end{aligned}$$

Og i følge vår fremgangsmåte er da

$$g(x) = x + r_1(x) = x + 2 + r_2(x) = x + 2 + \frac{3}{x - 1}$$

Som igjen betyr at

$$f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x - 1} = x + 2 + \frac{3}{x - 1}$$

Det bør ikke være noen overraskelse at f og g er den samme funksjonen skrevet på ulike måter.

Vi kan ta et nytt eksempel:

$$\frac{25x^2 - 36x + 7}{x + 3} = g(x) \quad \Leftrightarrow \quad (x + 3)g(x) = 25x^2 - 36x + 7$$

Skal vi klare å få et ledd $25x^2$ på venstresiden i den siste ligningen må $g(x) = 25x + r_1(x)$. Vi beregner da:

$$\begin{aligned}(x + 3)(25x + r_1(x)) &= 25x^2 - 36x + 7 \\ 25x^2 + 75x + (x + 3)r_1(x) &= 25x^2 - 36x + 7 \\ (x + 3)r_1(x) &= -111x + 7\end{aligned}$$

Akkurat samme problem her i nederste linje; skal vi klare å få et ledd $-111x$ på venstresiden må $r_1(x) = -111 + r_2(x)$ og vi får:

$$\begin{aligned}(x + 3)(-111 + r_2(x)) &= -111x + 7 \\ -111x - 333 + (x + 3)r_2(x) &= -111x + 7 \\ (x + 3)r_2(x) &= 340 \\ r_2(x) &= \frac{340}{x + 3}\end{aligned}$$

Og dette viser at

$$g(x) = 25x + r_1(x) = 25x - 111 + r_2(x) = 25x - 111 + \frac{340}{x + 3}$$

De to foregående eksempler viser den matematiske ideen bak polynomdivisjon og er et eksempel på en mye mer generell metode kallet Euklids algoritme. I praksis utfører vi ikke polynomdivisjon som hittil beskrevet men anvender i stedet en mer maskinell eller skjematisk metode. Det positive ved dette er at det med litt trening går fort og det negative er at selve matematikken skyves i bakgrunnen.

Vi illustrerer metoden på det andre eksemplet vårt. Vi skriver først:

$$25x^2 \quad -36x \quad +7 \quad : \quad x + 3 =$$

Vi ser nå på leddene i $25x^2 - 36x + 7$ og $x + 3$ med største eksponenter; i dette tilfellet $25x^2$ og x . Da spør vi oss selv: "hva skal x ganges med for å få $25x^2$ "? Svaret på dette er $25x$ og vi skriver nå $25x$ til høyre for likhetstegnet, beregner $(x + 3)(25x) = 25x^2 + 75x$ og fører dette inn i skjemaet vårt slik:

$$\begin{array}{r} 25x^2 \quad -36x \quad +7 \quad : \quad x + 3 = 25x \\ 25x^2 \quad +75x \end{array}$$

Deretter tar vi $25x^2 - 36x + 7$ og *trekker fra* den andre linjen $25x^2 + 75x$ og skriver resultatet i en ny linje:

$$\begin{array}{r} 25x^2 \quad -36x \quad +7 \quad : \quad x + 3 = 25x \\ 25x^2 \quad +75x \\ -111x \quad +7 \end{array}$$

Vi ser nå på leddet med høyest eksponent i *nederste* linje til høyre for divisjonstegnet, det vil si $-111x$, og på leddet med høyest eksponent i $x + 3$, det vil si x . Igjen spør vi: "Hva skal x ganges med for å få $-111x$ "? Svaret på dette spørsmålet er -111 . Vi beregner nå $-111(x + 3) = -111x - 333$ og fører inn i vårt skjema slik:

$$\begin{array}{r} 25x^2 - 36x + 7 \\ 25x^2 + 75x \\ -111x + 7 \\ -111x - 333 \end{array} : x + 3 = 25x - 111$$

Vi trekker som før nederste linje fra nestnederste linje og får:

$$\begin{array}{r} 25x^2 - 36x + 7 \\ 25x^2 + 75x \\ -111x + 7 \\ -111x - 333 \\ 340 \end{array} : x + 3 = 25x - 111$$

Vi er nå endt opp med ett tall, 340, som vi kaller for *resten* i divisjonen, og regnestykket fullføres nå ved å skrive:

$$\begin{array}{r} 25x^2 - 36x + 7 \\ 25x^2 + 75x \\ -111x + 7 \\ -111x - 333 \\ 340 \end{array} : x + 3 = 25x - 111 + \frac{340}{x+3}$$

Som vi ser endte vi her (heldigvis) opp med samme svar som tidligere. Det tilsvarende skjemaet for vårt første eksempel ser til slik ut:

$$\begin{array}{r} x^2 + x + 1 \\ x^2 - x \\ 2x + 1 \\ 2x - 2 \\ 3 \end{array} : x - 1 = x + 2 + \frac{3}{x-1}$$

Avsluttende bemerkninger: Polynomdivisjon virker kanskje litt mystisk, men med litt trening går det raskt unna. Det er ikke så mye annet å gjøre enn å streve med de første 20 stykkene, for metoden er et typisk eksempel på noe som *ligger i ryggmargen*.