Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Løsningsforslag: Eksamen i Brukerkurs for informatikere MA 0003, onsdag 30. november 2005

Del 1

Oppgave 1 Funksjonen $f(x)$ er gitt ved

$$f(x) = (x^2 - 3x + 1)e^x$$

med definisjonsmengde $D_f = [-4, \infty)$.

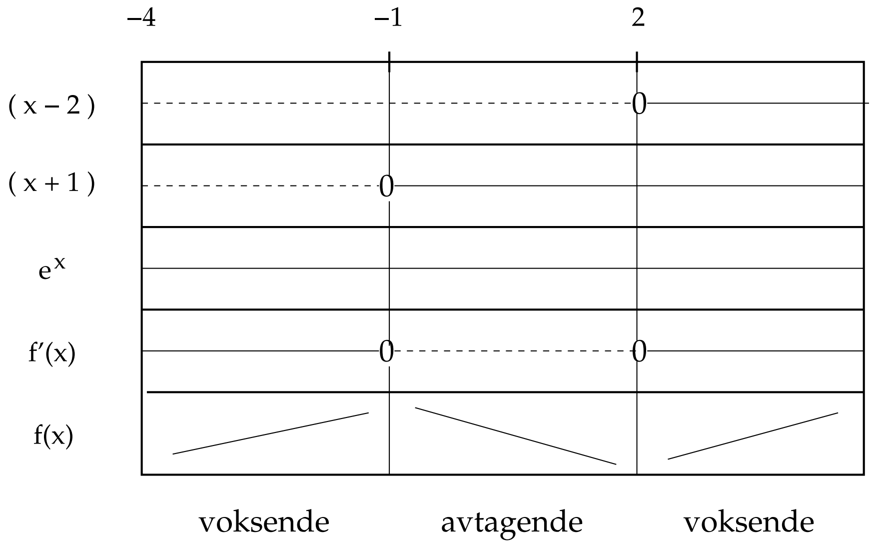
a) For å finne relative maksimum og minimum må man studere funksjonens deriverte, dens nullpunkt og fortegn. Funksjonen er et produkt av to faktorer $(x^2 - 3x + 1)$ og e^x, må bruke produktregelen for derivasjon:

$$f'(x) = (2x - 3)e^x + (x^2 - 3x + 1)e^x = (x^2 - x - 2)e^x$$

Faktoren e^x er aldri lik 0, dermed er $f'(x) = (x^2 - x - 2)e^x = 0$ bare når $(x^2 - x - 2) = 0$. Det skjer for $x = 2$ og $x = -1$, så

$$f'(x) = (x - 2)(x + 1)e^x$$

Dermed er eneste kandidater til maksimum og minimum gitt ved $x = 2$, $x = -1$ og endepunkt på intervallet, $x = -4$. Drøfter fortegnet til den deriverte:



Fortegnsskjema:

$f(x)$ er voksende på intervallet $(-4,-1)$ og $(2,\infty)$, og avtagende på intervallet $(-1,2)$. Dermed gir $x=-1$ et relativt maksimum. $x=-4$ og $x=2$ gir relative minimum.

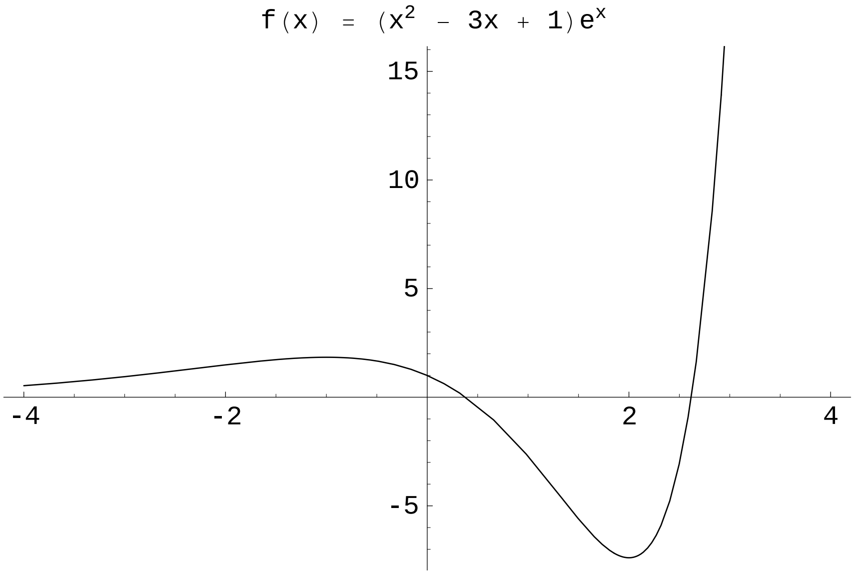
Alternativ: Andrederiverttesten kan også brukes til å avgjøre hva slags punkter $x=-1$ og $x=2$ er, da $f''(-1)<0$, og $f''(2)>0$ hvilket sier at det gir henholdsvis relativt maksimum og minimum. Derimot kan den ikke brukes for å finne ut noe om endepunktet på intervallet, så alt i alt er det best å bruke fortegnsskjema.

b) Vi fant i (a) at $f(x)$ har to relative minimum, må da sjekke funksjonsverdien i begge punktene for å avgjøre hva som er den globalt (absolutt) minste funksjonsverdien.

$$f(-4)=\frac{29}{e^4}=0.53 \quad \text{og} \quad f(2)=-e^2=-7.4$$

Ser at $f(2)$ gir den minste funksjonsverdien av disse to, dermed er den globale (absolutte) minimumsverdien $f(2)=-e^2$.
(NB: Du trenger ikke kalkulator for å avgjøre ved desimaltall hvilket av tallene som er minst, det ene er positivt og det andre er negativt.)

For den nysgjerrige: Slik ser grafen ut:



Oppgave 2 Den lineære transformasjonen $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ er gitt ved at $\underline{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ avbildes ved at $T(\underline{x}) = A\underline{x}$ der A er matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

a) $A \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$A \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \\ 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

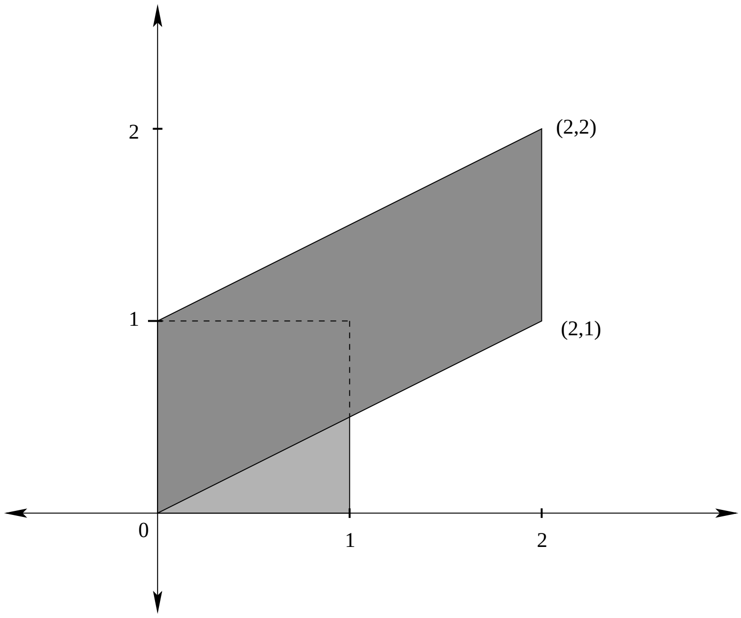
$A \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 0 + 0 \cdot 1 \\ 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$A \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 1 + 0 \cdot 1 \\ 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$

Dermed avbildes hjørnene i kvadratet slik:
$(0, 0)$ til $(0, 0)$ (seg selv),
$(1, 0)$ til $(2, 1)$,
$(0, 1)$ til $(0, 1)$ (seg selv), og til slutt
$(1, 1)$ til $(2, 2)$.

Linjene mellom punktene avbildes til linjene mellom billedpunktene, så bildet av enhetskvadratet blir figuren med fire sider og hjørner $(0,0)$, $(0,1)$, $(2,1)$ og $(2,2)$.

Skisse:



b) En 2×2-matrise $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ er invertibel hvis (og bare hvis) tallet $ad - bc$ er *ulik* 0, her er $ad - bc = 2 \cdot 1 - 0 \cdot 1 = 2 \neq 0$, så A er invertibel. Inversen til A er da gitt ved:

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

c) Siden A er invertibel finnes det bare en unik løsning, som er gitt ved

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = A^{-1}\underline{b} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix},$$

altså $x = 1$ og $y = 5$.

Alternativ: Man kan også se at matriseligningen er ekvivalent til ligningssystemet gitt ved at

$$A\underline{x} = \begin{bmatrix} 2x \\ x+y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix} ,$$

altså

$$\begin{aligned} 2x &= 2 \\ x+y &= 6 \end{aligned}$$

og løse dette (og få samme resultat). Tredje alternativ er å sette opp augmentert matrise til systemet,

$$[\,A\,\underline{b}\,] = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 6 \end{bmatrix} ,$$

redusere denne og løse systemet på den måten. Den mest nærliggende metoden er å bruke A^{-1} dersom du fant den i (b).

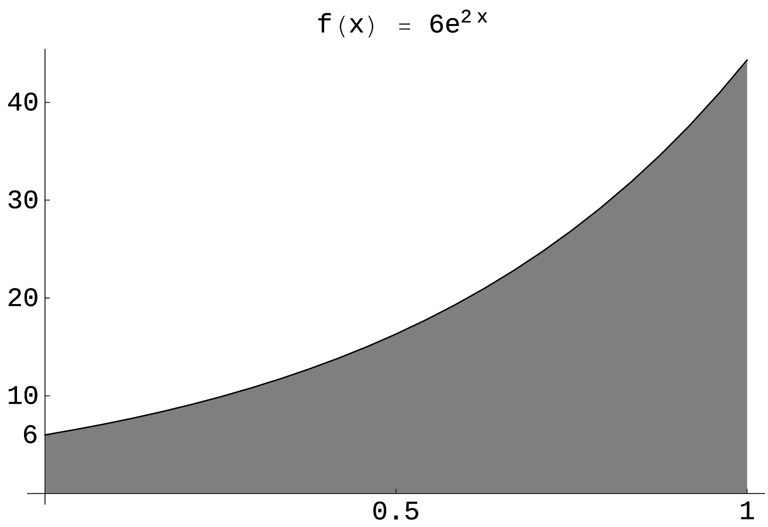
Oppgave 3

a) Siden funksjonen $g(x) = 6e^{2x} \geq 0$ på intervallet $[0, 1]$ (eksponensialfunksjonen positiv for alle verdier av $2x$) er arealet som omsluttes av grafen til $g(x)$, x-aksen og de vertikale linjene $x = 0$ og $x = 1$ gitt ved det bestemte integralet

$$\int_0^1 6e^{2x}dx = [\,3e^{2x}\,]_0^1 = 3e^2 - 3e^0 = 3(e^2 - 1)$$

($3e^{2x}$ er en antiderivert til $6e^{2x}$).

For den nysgjerrige: Skisse, areal skravert:



Del 2: Flervalgsdel

Oppgave 1. Riktig svar er **(a)** :

Bare linjene i alternativ (a) og (e) har riktig stigningstall, ser at i alternativ (a) vil $x = -1$ gi at $y = -\frac{3}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} = 1$, dermed er dette riktig alternativ siden punktet $(-1, 1)$ da ligger på linja (koordinatene x og y oppfyller ligningen).

Oppgave 2. Riktig svar er **(c)** :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{3x^3 + 2x^2 + 8}{2x^4 + x + 7} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{3}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{8}{x^4}}{2 + \frac{1}{x^3} + \frac{7}{x^4}} = 0$$

Kommentar: For slike brøker er teknikken å først skrive om uttrykket som følger:

Finn høyeste potens av x, i dette tilfellet er det x^4 som opptrer i første ledd i nevneren, dele på høyeste potens (her: x^4) i hvert ledd i teller og nevner. Man ser da hva som skjer med hvert enkelt ledd når x vokser:

Alle ledd i teller går mot 0, så telleren går mot 0. I nevneren går alle ledd unntatt det første mot null, det første leddet er konstant lik 2, så nevner går mot 2.

Dermed går brøken mot $\frac{0}{2} = 0$.

Oppgave 3. Riktig svar er **(d)** :

Man kan først og fremst slutte at produktet av en 2×4-matrise og en 4×2-matrise er definert, og at produktet er av størrelse 2×2, dermed er mulige alternativer (a) og (d). Ved å multiplisere sammen matrisene vil man uansett få resultat (d). Multiplikasjon:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 1 + 4 \cdot (-1) & 1 \cdot 0 + 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 0 + 4 \cdot 1 \\ 5 \cdot 1 + 6 \cdot 0 + 7 \cdot 1 + 8 \cdot (-1) & 5 \cdot 0 + 6 \cdot (-1) + 7 \cdot 0 + 8 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

Oppgave 4. Riktig svar er **(a)** :

Den deriverte av $5x^2 \ln x + 7x^2$ er

$$10x \cdot \ln x \; + \; 5x^2 \cdot \frac{1}{x} \; + \; 7 \cdot 2x \; = \; 10x \ln x + 5x + 14x \; = \; 10x \ln x + 19x$$

Kommentar: Produktregel på produktet av $5x^2$ og $\ln x$, trekk sammen uttrykket til slutt.

Oppgave 5. Riktig svar er **(a)** :

En slik rasjonal funksjon (brøk av polynomer) har vertikal asymptote for x-verdier som gir null i nevner og ikke i teller (dvs, null i nevner når uttrykket er maksimalt forkortet).
Av alternativene gir både $x = -3$ og $x = 2$ null i nevner, men sistenevnte gir også null i teller. Dermed er $(x-2)$ faktor både i teller og nevner, kan forkortes bort:

$$g(x) = \frac{x-2}{x^2+x-6} = \frac{(x-2)}{(x-2)(x+3)} = \frac{1}{(x+3)},$$

dermed er $x = -3$ eneste vertikale asymptote.

Oppgave 6. NB: Trykkfeil i alternativer! Se bort fra denne, beklager!

(For de som lurer: integralet kan løses ved substitusjon $u = x^2$, en antiderivert til $\ln u$ er $u \ln u - u$, så generell antiderivert er $x^2 \ln(x^2) - x^2 + c$. Det mangler altså et ledd $-x^2$ i svar (a), dessverre!)

Oppgave 7. Riktig svar er **(d)** :
Må studere den deriverte $h'(x)$ for å finne minimumspunkter:

$$h'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 6(x^2 - x - 2) = 6(x-2)(x+1)$$

som er null for $x = -1$ og $x = 2$. Bruk fortegnsskjema. Den deriverte er negativ på intervallet $(-1, 2)$, der er dermed h minkende. På intervallet $(2, 4)$ er den deriverte positiv , og h er dermed voksende på det området. Eneste mulige minimum er da for $x = 2$, som gir $h(2) = -37$. (Endepunkter på intervallet må være relative maksimum tatt i betraktning hvor h minker og øker i verdi.)

Oppgave 8. Riktig svar er **(d)** :

$a(t) = v'(t) = 12t$, og for $t = 2$ er $a(2) = 24$ km/time.

Oppgave 9. Riktig svar er **(e)**.

Deriverer du $P(t) = 400e^{-4t}$ får du $-4P(t)$, og samtidig kan du sjekke at $P(0) = 400 \cdot e^o = 400$, Det er også et resultat fra boka som forteller deg hva løsningen på en slik differensialligning ($\frac{dP}{dt} = -4P$) må være, med en tilleggsbetingelse som $P(0) = 400$.

Oppgave 10. Riktig svar er **(b)**.

Regelen for derivasjon av en potensfunksjon x^n er $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$, her er $n = \frac{7}{6}$, så

$$\frac{7}{6}x^{7/6-1} \;=\; \frac{7}{6}x^{1/6}$$

Oppgave 11. Riktig svar er **(c)**.

Produktet av en 5×7-matrise og B en $7 \times n$-matrise er en $5 \times n$-matrise, dermed er $n = 2$.

Oppgave 12. Riktig svar er **(e)**.

Integralet kan skrives som integralet av en potensfunksjon:

$$\int \frac{12}{x^5}\,dx \;=\; \int 12x^{-5}\,dx \;=\; 12\int x^{-5}\,dx \;=\; 12 \cdot \frac{1}{(-4)}x^{-4} + c \;=\; -\frac{3}{x^4} \;+\; c$$

Kommentar: En antiderivert til x^n er $\frac{1}{n+1}x^{n+1}$, her er $n = -5$.