Løsningsforslag til Eksamen i MA0003 den 17.12.2007

Oppgave 1:

a) $f'(x) = 6x^2 - 6x - 12$ så stigningstallet til tangenten i 0 blir $f'(0) = -12$. Skjæringspunktet med y aksen er $f(0) = 5$ og tangentligningen blir dermed $y = -12x + 5$.

b) f har kritiske punkt i endepunktene -2 og 4 og der $f'(x) = 0$:

$$\begin{aligned} 6x^2 - 6x - 12 &= 0 \\ x^2 - x - 2 &= 0 \\ x &= \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2} \\ x &= -1 \vee x = 2 \end{aligned}$$

Hermed blir de kritiske punkt $-2, -1, 2$ og 4.

c) Maksimum og minimum skal findes der f har kritiske punkt, så vi regner ut funksjonsverdiene i disse punktene:

$$f(-2) = 1 \quad f(-1) = 12 \quad f(2) = -15 \quad f(4) = 37$$

Det vil si at f har maksimum 37 i $x = 4$ og minumum -13 i $x = 2$.

Oppgave 2

a) Vi benytter substitusjonen $u = \ln x$ slik at $du = \frac{1}{x}dx$:

$$\int \frac{\ln x}{x}\, dx = \int u\, du = \frac{1}{2}u^2 + C = \frac{1}{2}(\ln x)^2 + C$$

b)

$$\begin{aligned} \int_1^2 xe^x\, dx &= [xe^x]_1^2 - \int_1^2 e^x\, dx = [xe^x - e^x]_1^2 \\ &= 2e^2 - e^2 - (e - e) = e^2 \end{aligned}$$

Oppgave 3:

a) Vi finner A^{-1} ved rekkereduksjonen $(A|I) \sim (I|A^{-1})$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{R_3 \leftrightarrow R_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\overset{R_3 + 2R_1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \overset{-R_3 + R_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\overset{-R_1 + R_2 - R_3}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Det vil si

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Vi kan bruke svaret fra punkt a):

$$x = A^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Oppgave 4:

a)

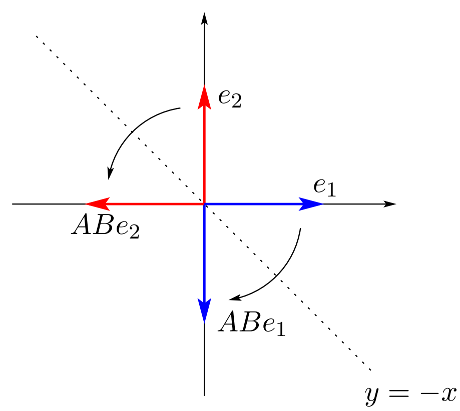
$$A = \begin{pmatrix} | & | \\ T(e_1) & T(e_2) \\ | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} | & | \\ S(e_1) & S(e_2) \\ | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Produktet AB er matrisen for en lineærtransformasjon som vi kan kalle L.
Det vil si:

$$\begin{pmatrix} | & | \\ L(e_1) & L(e_2) \\ | & | \end{pmatrix} = AB = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Med andre ord sender L vektoren e_1 på $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ og vektoren e_2 på $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.



Som vi ser svarer dette til refleksjon i linjen $y = -x$.

Oppgave 5:

a) Integralet

$$\int_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - x^2}\, dx$$

er lik arealet under grafen for $\sqrt{R^2 - x^2}$. Det vil si arealet av en halvsirkel med radius R. Svaret blir med andre ord $\frac{1}{2}\pi R^2$ som er halvparten av arealet til en *hel* sirkel med radius R.

b)

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-R}^{R} f(x)^2\, dx = \pi \int_{-R}^{R} R^2 - x^2\, dx \\ &= \pi[R^2 x - \frac{1}{3}x^3]_{-R}^{R} = \pi \left(R^3 - \frac{1}{3}R^3 - (-R^3 + \frac{1}{3}R^3) \right) \\ &= \frac{4}{3}\pi R^3 \end{aligned}$$