EKSAMEN I MA0003 9. JUNI 2005
LØSNINGSFORSLAG

Del 1: Langsvarsoppgaver.

Oppgave 1.

a) Hvis vi lar $u = 1 + x^2$ får vi

$$\frac{du}{dx} = 2x,$$

eller

$$\frac{1}{2}du = xdx.$$

Derfor har vi

$$\int \frac{x}{1+x^2}dx = \int \frac{xdx}{u} = \int \frac{1}{2}\frac{du}{u} = \frac{1}{2}\ln u + C = \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C.$$

b) For x mellom 0 og 1 er $f(x)$ positiv. Derfor er arealet under grafen til f fra $x = 0$ til $x = 1$ gitt ved:

$$A = \int_0^1 f(x)dx.$$

Ved å bruke svaret fra a) får vi

$$A = \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}dx = \left[\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]_0^1 = \frac{1}{2}(\ln(1+1^2) - \ln(1+0)) = \frac{1}{2}\ln 2.$$

c) Grafene skjærer hverandre når $g(x) = h(x)$, altså når

$$x = x^2 - x \quad \Longrightarrow \quad x^2 - 2x = x(x-2) = 0, \quad \text{dvs.} \quad x = 0 \vee x = 2.$$

Videre ligger grafen til $g(x)$ over grafen til $h(x)$ når x ligger mellom 0 og 2. ($g(1) = 1 > h(1) = 0$.) Da er arealet avgrenset av grafene gitt ved:

$$\begin{aligned} A &= \int_0^2 [g(x) - h(x)]dx = \int_0^2 [x - (x^2 - x)]dx = \int_0^2 [2x - x^2]dx \\ &= \left[x^2 - \frac{1}{3}x^3\right]_0^2 = (2^2 - \frac{1}{3}2^3) - (0 - 0) = \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

Oppgave 2.

a) Vi regner ut:

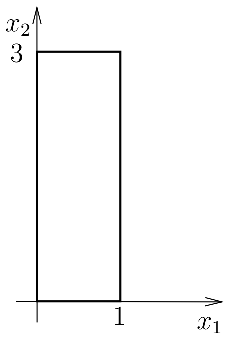
$$A\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\cdot 0 + 0\cdot 0 \\ 0\cdot 0 + 3\cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$A\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\cdot 1 + 0\cdot 0 \\ 1\cdot 0 + 3\cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$A\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\cdot 0 + 0\cdot 1 \\ 0\cdot 0 + 3\cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix},$$

$$A\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\cdot 1 + 0\cdot 1 \\ 1\cdot 0 + 3\cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Da blir bildet av enhetskvadratet under $A\mathbf{x}$ slik:



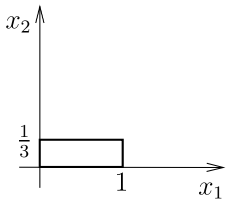
b) Vi vet at hvis $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ så er inversen A^{-1} (om den er definert) gitt ved

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

I vårt tilfelle får vi derfor:

$$A^{-1} = \frac{1}{1\cdot 3 - 0\cdot 0}\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

Bildet av enhetskvadratet under $A^{-1}\mathbf{x}$ blir da:



Del 2: Flervalgsoppgaver.

1. Stigningstallet blir $m = \dfrac{5-(-1)}{3-(-1)} = \dfrac{3}{2}$, og ligningen blir derfor

$$y - (-1) = \frac{3}{2}(x-(-1)) = \frac{3}{2}x + \frac{3}{2} \quad\Longrightarrow\quad y = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}.$$

Svar: (v)

2. Deler vi i teller og nevner på den høyeste potensen av x som forekommer i brøken får vi:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-3x+1}{x^3+2} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{x^3}-\frac{3x}{x^3}+\frac{1}{x^3}}{\frac{x^3}{x^3}+\frac{2}{x^3}} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}-\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^3}}{1+\frac{2}{x^3}} = 0.$$

Svar: (iii)

3. Siden f er en deriverbar funksjon på et lukket intervall vil maksimalverdien forekomme i et av de kritiske puntkene eller i intervallendepunktene.

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9.$$

For å finne de kritiske punktene setter vi $f'(x) = 0$ og løser ligningen:

$$3x^2 - 12x + 9 = 0 \quad\Longleftrightarrow\quad x = \frac{-(-12)}{2\cdot 3} \pm \frac{\sqrt{(-12)^2 - 4\cdot 3\cdot 9}}{2\cdot 3} = 2 \pm 1,$$

dvs. $x = 1$ eller $x = 3$. Vi sjekker derfor funksjonverdiene i $x = -1, x = 1$ og $x = 3$ (sjekker $x = 3$ fordi det er et intervallendepunkt). Vi får da:

$$f(-1) = -15, f(1) = 5, f(3) = 1.$$

Svar: (ii)

4. Deriver ved å bruke kjerneregelen:
$$f'(x) = 2 \cdot (\ln x) \cdot (\ln x)' = 2 \cdot (\ln x) \cdot \frac{1}{x} = \frac{2\ln x}{x}.$$
   Svar: (iv)
5. For ligningen $\frac{dN}{dt} = -kN$ har vi at halveringstiden T er gitt ved $T = \ln 2/k$. I vårt tilfelle er $k = 0,0015$, så vi får:
$$T = \frac{\ln 2}{0,0015} \approx \frac{0,6931472}{0,0015} \approx 462,1.$$
   Svar: (i)
6. *Forslag 1:* (Substitusjon) Bruk substitusjonen $u = (\frac{1}{2}x^2 - x)$. Det gir $\frac{du}{dx} = (x-1)$, eller $dx = \frac{du}{x-1}$. Da får vi:
$$\int (x-1)\left(\frac{x^2}{2} - x\right) dx = \int (x-1)u\,\frac{du}{(x-1)} = \int u\,du = \frac{1}{2}u^2 + C = \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2} - x\right)^2 + C.$$
   Forslag 2: (Delvis integrasjon) La $u = \frac{1}{2}x^2 - x, v' = x-1$. Da er $u' = x-1$ og $v = \frac{1}{2}x^2 - x$, så ved å bruke delvis integrasjon får vi
$$\int (x-1)\left(\frac{x^2}{2} - x\right) dx = \left(\frac{x^2}{2} - x\right)\left(\frac{x^2}{2} - x\right) - \int \left(\frac{x^2}{2} - x\right)(x-1)dx,$$
   som gir at
$$2\int (x-1)\left(\frac{x^2}{2} - x\right) dx = \left(\frac{x^2}{2} - x\right)^2,$$
   hvilket vil si:
$$\int (x-1)\left(\frac{x^2}{2} - x\right) dx = \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2} - x\right)^2 + C.$$
   Forslag 3: (Skriv ut integranden) Hvis vi skriver ut integranden (den funksjonen som skal integreres) får vi
$$(x-1)\left(\frac{x^2}{2} - x\right) = \frac{1}{2}x^3 - x^2 - \frac{1}{2}x^2 + x = \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + x.$$
   Det gir
$$\begin{aligned}\int (x-1)\left(\frac{x^2}{2} - x\right) dx &= \int \left(\frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + x\right) dx \\ &= \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + C \\ &= \frac{1}{2}\left((\frac{1}{2}x^2)^2 - x^3 + x^2\right) + C \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x^2 - x\right)^2 + C.\end{aligned}$$
   (I den siste overgangen brukte vi 2. kvadratsetning.)
   Svar: (i)
7. Her er det delvis integrasjon som er nøkkelen: La $u = 2x$ og $v' = e^x$. Da er $u' = 2$, $v = e^x$ og vi får
$$\int 2xe^x\,dx = 2xe^x - \int 2e^x\,dx = 2xe^x - 2e^x + C = 2e^x(x-1) + C.$$
   Svar: (i)
8. Om A er en $m \times p$-matrise og B er en $p \times n$-matrise, så er AB en $m \times n$-matrise. Derfor må $n = 4$.
   Svar: (iv)

9. Legg merke til at produktet er definert. Vi får:

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} (-1)\cdot 2 + 3\cdot 0 & (-1)\cdot(-3) + 3\cdot 1 & (-1)\cdot 1 + 3\cdot(-2) & (-1)\cdot 0 + 3\cdot 3 \\ 1\cdot 2 + 2\cdot 0 & 1\cdot(-3) + 2\cdot 1 & 1\cdot 1 + 2\cdot(-2) & 1\cdot 0 + 2\cdot 3 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 6 & -7 & 9 \\ 2 & -1 & -3 & 6 \end{bmatrix}.$$

Svar: (i)

10. Vi “separerer” først variablene, dvs. setter alt som har med y å gjøre på venstre side og alt som har med x å gjøre på høyre:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{5x^4}{y} \\ dy &= \frac{5x^4}{y} dx \\ y\,dy &= 5x^4\,dx. \end{aligned}$$

Så integrerer vi:

$$\begin{aligned} \int y\,dy &= \int 5x^4\,dx \\ \frac{1}{2}y^2 &= \frac{1}{5}\cdot 5x^5 + C' \\ y^2 &= 2x^5 + C \quad (C = 2C') \\ y &= \sqrt{2x^5 + C}. \end{aligned}$$

(Egentlig gjelder dette kun så lenge $2x^5 + C \geq 0$.)

Svar: (ii)