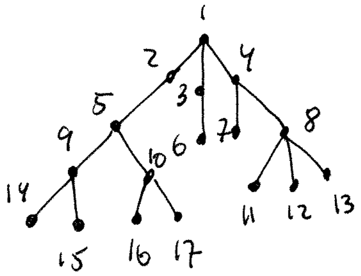
LØSNINGSFORSLAG FOR 2. OBLIGATORISKE ØVING, MA0301, HØSTEN 2003

12.2.6

Gitt treet



Skal liste hjørnene når treet traverseres i

1) preorder traversal:

1 2 5 9 14 15 10 16 17 3 6 4 7 8 11 12 13

2) postorder traversal:

14 15 9 16 17 10 5 2 6 3 7 11 12 13 8 4 1

X november 94, oppgave 6

Skal finne feilen i argumentet for at enhver symmetrisk og transitiv relasjon $\mathcal{R}$ nødvendigvis også er refleksiv.

Argumentet er korrekt i alle stegene unntatt konklusjonen. Det er riktig at hvis $(x,y) \in \mathcal{R}$ vil $(y,x) \in \mathcal{R}$ pga. symmetri og $(x,x) \in \mathcal{R}$ (det samme gjelder (y,y)) pga. transitivitet, men dette garanterer ikke refleksivitet. Det eneste dette garanterer er at for alle x representert i $\mathcal{R}$ vil $(x,x) \in \mathcal{R}$. Men dette trenger ikke å være alle elementene i A! F.eks. er relasjonen

$$\mathcal{R} = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)\} \text{ på mengden } A = \{1,2,3\}$$

symmetrisk og transitiv, men ikke refleksiv siden $(3,3) \notin \mathcal{R}$.

X mai -98, oppgave 1

a) Studenten skal besvare 7 av 10 spørsmål til eksamen. Hvis det ikke er noen restriksjoner på valg av oppgaver, har vi en situasjon der det skal velges 7 av 10 objekter uten hensyn til rekkefølge og uten tilbakelegging. Vi løser derfor oppgaven vha. kombinasjoner:

$$\binom{10}{7} = 120$$

<u>Studenten kan altså besvare eksamen på 120 måter.</u>

b) Nå har vi gitt at han må besvare minst 4 av de 6 første spørsmålene. Dette løser vi ved å dele opp i tre tilfeller, der han besvarer hhv. 4, 5 og 6 av de første spørsmålene. Da kan vi, ifølge summasjonsregelen, finne totalt ant. måter ved å summere ant. muligheter for de tre tilfellene.

1) 4 av de 6 første spørsmålene:
Deler opp tilfellet i to ledd og bruker produktregelen. Situasjonen i hvert ledd er som i a), så vi bruker igjen kombinasjoner.

$$\#\text{ måter} = \#\text{ måter å velge 4 av de 6 første spm.} \times \#\text{ måter å velge 3 av de 4 siste spm.}$$

$$= \binom{6}{4} \cdot \binom{4}{3} = 15 \cdot 4 = \underline{60}$$

2) Samme metode som i 1) gir nå

$$\#\text{ måter} = \#\text{ måter å velge 5 av de 6 første spm.} \times \#\text{ måter å velge 2 av de 4 siste spm.}$$

$$= \binom{6}{5} \cdot \binom{4}{2} = 6 \cdot 6 = \underline{36}$$

3) Samme metode igjen gir nå $\binom{6}{6} \cdot \binom{4}{1} = 1 \cdot 4 = \underline{4}$): måter

<u>Totalt kan altså studenten besvare på $60 + 36 + 4 = 100$ måter.</u>

Denne oppgaven kan også løses på en alternativ, enklere måte, nemlig ved å observere at det bare fins <u>en</u> måte å ikke oppfylle dette på, nemlig å velge 3 av de 6 første og alle de fire siste. Det er ikke mulig å velge færre enn 3 av de 6 første, da det i såfall ville vært for få oppgaver igjen til å få 7 oppgaver totalt. Dette gir oss derfor at

$\#$ "lovlige" muligheter =

$\#$ muligheter totalt $-$ $\#$ "ulovlige" muligheter

Denne har vi fra a)

Som: første måte å gjøre oppgaven på blir dette $\binom{6}{3}\cdot\binom{4}{4}$

$$= 120 - \binom{6}{3}\binom{4}{4} = 120 - 20 = \underline{\underline{100}}$$

X mai-99, oppgave 2 → Hele denne eksamenen står det løsningsforslag på bakerst i eksamensoppgaveheftet.

X mai-99, oppgave 5b (frivillig)

X desember 2000, oppgave 1

a)

Skal forenkle det logiske uttrykket:

$$\neg(p \vee q) \vee [(\neg p \wedge q) \vee \neg q]$$

$$\xLeftrightarrow{\text{Assosiativ lov}} [\neg(p \vee q) \vee (\neg p \wedge q)] \vee \neg q$$

$$\xLeftrightarrow{\text{De Morgan}} [(\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)] \vee \neg q$$

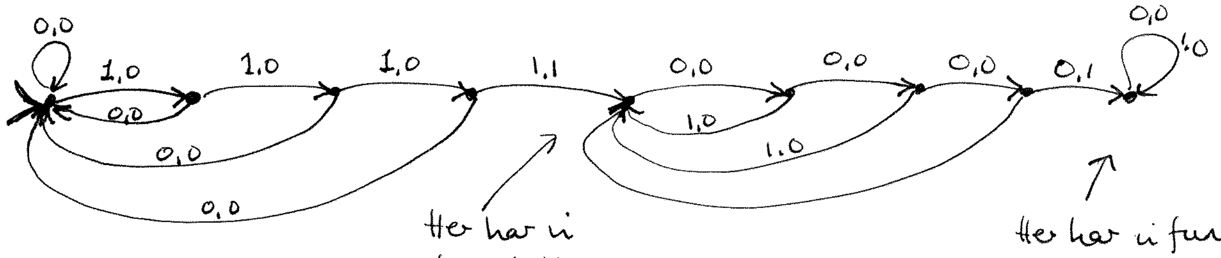
$$\xLeftrightarrow{\text{Distributiv lov}} [\neg p \wedge (\neg q \vee q)] \vee \neg q$$

$$\xLeftrightarrow{\text{Invers lov}} [\neg p \wedge T_0] \vee \neg q \xLeftrightarrow{\text{Identitets-lov}} \underline{\underline{\neg p \vee \neg q \xLeftrightarrow{\text{De Morgan}} \neg(p \wedge q)}}$$

Like rette svar

X desember 2000, Oppgave 2

Denne tilstandsmaskinen løser problemet:



Her har vi funnet 1111 for første gang, og skriver 1. Går så over til å lete etter 0000.

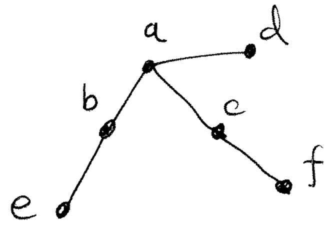
Her har vi funnet 0000 og skrevet en 1. Fra nå av skrives bare 0'er.

Husk at dette ikke nødvendigvis er eneste løsning!

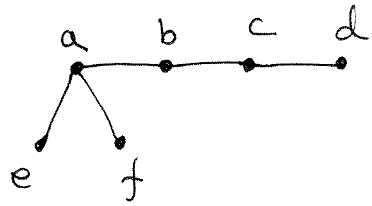
X des. 2000, oppgave 3

a) Her er det bare å prøve seg fram! Tre slike grafer er

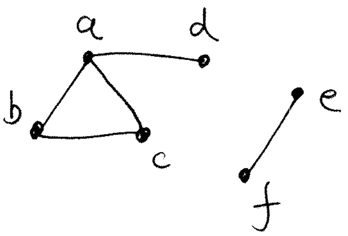
G_1 :



G_2 :



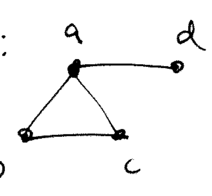
G_3 :



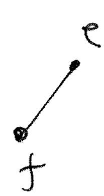
- G_1 og G_2 er ikke isomorfe fordi begge hjørnene med grad to er forbundet med hjørnet med grad 3 i G_1, mens dette ikke er tilfellet for G_2.
- G_3 er ikke isomorf med verken G_1 eller G_2 fordi disse er sammenhengende, men det er ikke G_3. Så ingen av grafene er isomorfe.

b) Vi ser at G_1 og G_2 er sammenhengende og er derfor sine egne eneste sammenhengskomponenter, mens G_3 ikke er sammenhengende og har to sammenhengskomponenter:

S_1 :



S_2 :



X mai -01, oppgave 2

a) Gitt $A = \{1, 2, 3\}$. Skal gi eksempel på

1) funksjon fra A til A som verken er injektiv eller surjektiv. En slik funksjon er (her skrevet i relasjonsnotasjon):

$$f = \{(1,1), (2,1), (3,1)\}$$

Denne er ikke 1-1 siden flere tall sendes til 1, og er ikke surjektiv siden 2 og 3 ikke treffes.

2) funksjon fra A til A som er både surjektiv og injektiv:

$$f = \{(1,1), (2,3), (3,2)\}$$

Denne er injektiv siden alle tall sendes på forskjellige tall, og surjektiv siden alle treffes.

I dette tilfellet finnes det ingen funksjon som er surjektiv men ikke injektiv fordi f går fra A til A selv, så hvis f er surjektiv vil vi "bruke opp" alle elementene i A på å skape surjektivitet, slik at det ikke vil bli noen elementer igjen som vi kan bruke for å hindre at funksjonen blir injektiv. For å si det kort; grunnen er at f går mellom to mengder med samme kardinalitet.

b)

$A = \{1,2,3\}$ $\quad R = \{(1,1),(1,2),(2,3),(2,2),(2,1)\}$

R er ikke refleksiv fordi $(3,3) \notin R$

R er ikke symmetrisk fordi $(2,3) \in R$, men $(3,2) \notin R$

R er ikke transitiv fordi $(1,2),(2,3) \in R$, men $(1,3) \notin R$.

Den minste relasjonen på A som inneholder R og er symmetrisk, er

$$R \cup \{(3,2)\}$$

Den minste relasjonen på A som inneholder R og er transitiv, er

$$R \cup \{(1,3)\}$$

X des. 2000, oppgave 4

Gitt $G=(V,E)$, rettet graf, $|V| = v$, $|E| = e$. Da er

$$\sum_{v\in V} od(v) = \sum_{v\in V} id(v) = e$$

fordi hver kant i E bidrar med 1 til $\sum_{v\in V} od(v)$ siden den går ut fra et, og bare et, hjørne. Tilsvarende bidrar hver kant også med 1 til $\sum_{v\in V} id(v)$ siden den går inn til nøyaktig et hjørne.

13.1.2 (Frivillig)

a) Anvender Dijkstras algoritme på $G=(V,E)$, $v_0 = a$, $|V| = n = 7$

Steg 1 $i = 0$, $S_0 = \{a\}$

$a \to (0,-)$
$b \to (\infty,-)$
$c \to (\infty,-)$
$f \to (\infty,-)$
$g \to (\infty,-)$
$h \to (\infty,-)$
$i \to (\infty,-)$

$n > 1$, så vi fortsetter til steg 2.

Steg 2

Ser at

$L(b) = \min\{\infty, 0+14\} = 14 \Rightarrow$ b får nytt merke $(14,a)$

$L(g) = \min\{\infty, 0+10\} = 10 \Rightarrow$ g —〃— $(10,a)$

$L(h) = \min\{\infty, 0+17\} = 17 \Rightarrow$ h —〃— $(17,a)$

De andre hjørnene forblir uendret.

Steg 3

Det finnes minst et hjørne i $\overline{S_0}$ som ikke er merket med $(\infty,-)$, så vi fortsetter:

1) $v_1 = g$

2) $S_1 = S_0 \cup \{g\} = \{a,g\}$

3) $i = 0+1 = 1 < n \Rightarrow$ vi fortsetter

Steg 4 (=Steg 2)

Ser at

$L(b) = \min\{14, \overset{\to \text{via } g}{10+3}\} = 13 \Rightarrow$ b får nytt merke $(13,g)$

$L(h) = \min\{17, \overset{\to \text{via } g}{10+6}\} = 16 \Rightarrow$ h —〃— $(16,g)$

$L(i) = \min\{\infty, \overset{\to \text{via } g}{10+4}\} = 14 \Rightarrow$ i —〃— $(14,g)$

Steg 5 (= steg 3)

Det finnes minst et hjørne i $\bar{S}_1$ som ikke er merket med $(\infty, -)$, så vi fortsetter.

1) $v_2 = b$

2) $S_2 = S_1 \cup \{b\}$

3) $i = 2 < n-1$

Steg 6 (= steg 2)

Ser at

$h(c) = \min\{\infty,\ 13 + \overset{\to \text{via } b}{9}\} = 22 \Rightarrow c$ får nytt merke $(22, b)$

$h(f) = \min\{\infty,\ 13 + \overset{\to \text{via } b}{10}\} = 23 \Rightarrow f$ —— " —— $(23, b)$

Resten uforandret.

Steg 7 (= steg 3)

Det finnes minst et hjørne i $\bar{S}_2$ som ikke er merket med $(\infty, -)$, så vi fortsetter.

1) $v_3 = i$

2) $S_3 = S_2 \cup \{i\}$

3) $i = 3 < n-1 \Rightarrow$ fortsetter

Steg 8 (= steg 2)

Ser at

$h(h) = \min\{16,\ 14 + \overset{\to \text{via } i}{1}\} = 15 \Rightarrow h$ får nytt merke $(15, i)$

$h(f) = \min\{23,\ 14 + \overset{\to \text{via } i}{7}\} = 21 \Rightarrow f$ —— " —— $(21, i)$

Resten uforandret.

Steg 9 (= steg 3)

1) $v_4 = h$

2) $S_4 = S_3 \cup \{h\}$

3) $i = 4 < n-1 \Rightarrow$ fortsetter

Steg 10 (= steg 2)

Alt uforandret

Steg 11 (= steg 3)

1) $v_5 = f$

2) $S_5 = S_4 \cup \{f\}$

3) $i = 5 < n-1 \Rightarrow$ fortsetter

Steg 12 (= steg 2)

Alt uforandret

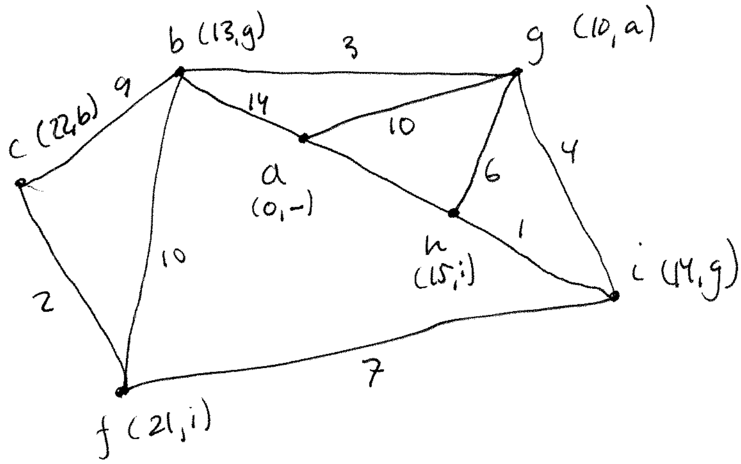
Steg 13 (= steg 3)

1) $v_6 = c$

2) $S_6 = S_5 \cup \{c\}$

3) $i = 6 = n-1 \Rightarrow$ vi stopper med resultatet

$a \to (0, -)$
$b \to (13, g)$
$c \to (22, b)$
$f \to (21, i)$
$g \to (10, a)$
$h \to (15, i)$
$i \to (14, g)$



b) Følger resultatet i a) "baklengs":

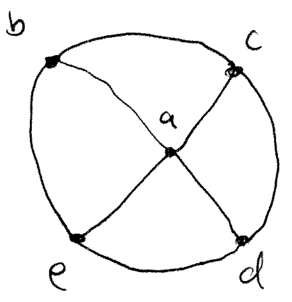
$c \xleftarrow{9} b \xleftarrow{3} g \xleftarrow{10} a$

$f \xleftarrow{7} i \xleftarrow{4} g \xleftarrow{10} a$

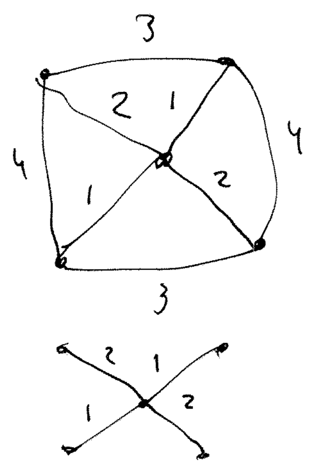
$i \xleftarrow{4} g \xleftarrow{10} a$

13.2.2 (frivillig)

$G = W_4$:

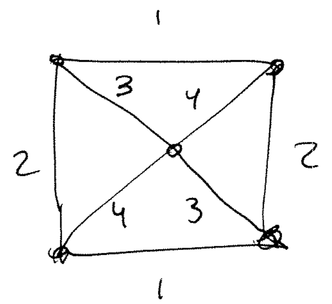


a)

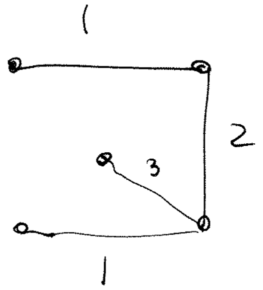


Har unikt minimalt utspennende tre fordi vi må starte med de fire kantene med vekt 1 og 2 iflg. Kruskals algoritme, og da kan vi ikke velge flere kanter (det ville gitt sykler).

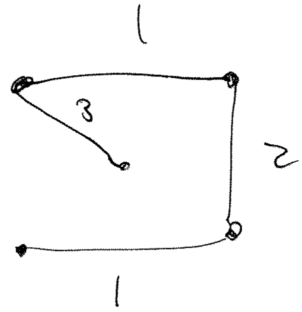
b)



har ikke unikt min. utspennende tre fordi vi ved Kruskals algoritme kan få både



og



(bl.a)

som minimale utspennende trær, og disse er ikke isomorfe (den første har et hjørne av grad 3, det har ikke den andre).