Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

LØSNINGSFORSLAG EKSAMEN V06, MA0301

Oppgave 1 a) Sett opp en sannhetsverditabell(truth table) for det logiske uttrykket

$$(p \to q) \to r.$$

Løsning 1a):

p	q	r	$p \to q$	$(p \to q) \to r$
0	0	0	1	0
0	0	1	1	1
0	1	0	1	0
0	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	0	1	0	1
1	1	0	1	0
1	1	1	1	1

b) Benytt slutningsreglene(rules of inference) til å vise at følgende slutning er gyldig:

$$\begin{array}{l} p \to (q \to r) \\ p \vee s \\ t \to q \\ \neg s \\ \hline \therefore \neg r \to \neg t \end{array}$$

Løsning 1b):

$1. p \vee s$	premiss
$2. \neg s$	premiss
$3. p$	1. og 2., disjunktiv syllogisme
$4. p \rightarrow (q \rightarrow r)$	premiss
$5. q \rightarrow r$	3. og 4., modus ponens
$6. t \rightarrow q$	premiss
$7. t \rightarrow r$	6. og 5., syllogisme
$8. \therefore \neg r \rightarrow \neg t$	7., logisk ekvivalens

Oppgave 2 Chewbacca har av en eller annen grunn fått det for seg at han skal finne ut hvor mange ord det kan finnes i wookie. Språket wookie har et ganske begrenset antall lyder/bokstaver, så alfabetet han har å arbeide med består bare av 9 tegn, a, e, i, n, o, r, u, w og y. Å finne det totale antall ord er vanskelig, men vi skal hjelpe Chewbacca et stykke på veien.

a) Hvor mange forskjellige ord på 7 lyder/bokstaver finnes hvis hver lyd/bokstav skal brukes maksimalt en gang i hvert ord?

Løsning 2a):
Dette er permutasjoner, og spørsmålet er hvor mange permutasjoner finnes av 7 objekter hentet fra en mengde av 9 distinkte objekter:

$$\mathbf{P}(9,7) = 181440.$$

b) Hvor mange forskjellige ord på to lyder/bokstaver finnes det?

Løsning 2b):
Oppgaven sier ord på to bokstaver, så repetisjoner er ikke utelukket. For å få ett ord på to bokstaver så må det velges bokstav to ganger, og hver gang har vi da 9 valg. Så ved produktregelen får vi

$$9^2 = 81.$$

c) Wookie er kjent for sine lange lyder. Hvor mange ord på 5 lyder/bokstaver finnes det, hvis alle ordene må inneholde nnn, det vil si minst 3 sammenhengende n'er?

Løsning 2c):
Vi ser på ord på 5 bokstaver, hvor 3 av disse er n'er og de to siste velges fritt. Videre så kan de to fritt valgte bokstavene fordeles rundt n'ene på følgende måter:

$$1.\_\,\_nnn$$
$$2.\_nnn\_$$
$$3.nnn\_\,\_$$

Antall ord på to bokstaver har vi fra b), men det er en ting til å passe på, fordi i produktet $3 \cdot 81 = 243$ så er noen ord telt flere ganger:

$$nnnnn$$

er telt 3 ganger, både i situasjon 1, 2. og 3. I tillegg er alle ord på formen

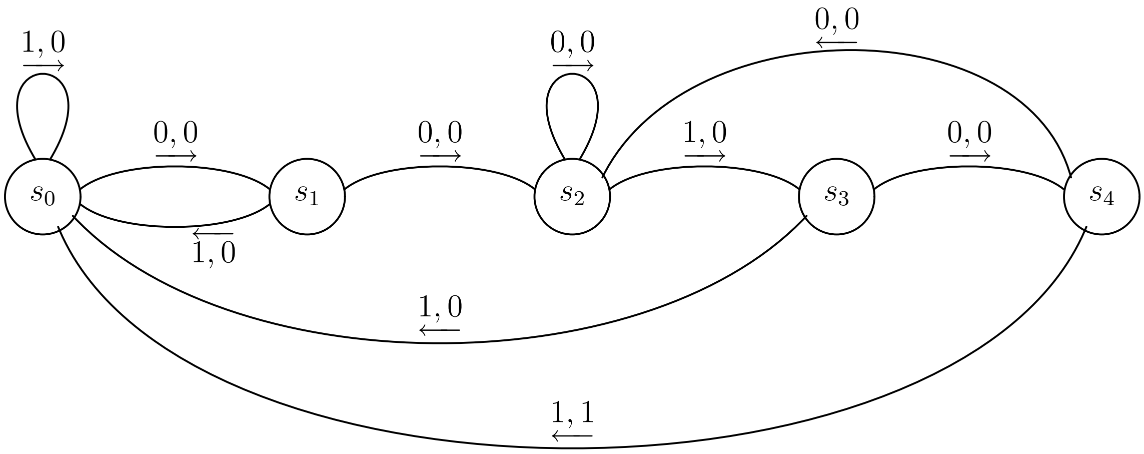
$$\_nnnn \text{ og } nnnn\_$$

med nøyaktig 4 n'er telt to ganger, henholdsvis i situasjon 1. og 2., og i situasjon 2. og 3. Det er 8 bokstaver som ikke er n, så svaret blir:

$$243 - (2 + 2 \cdot 8) = 225$$

Oppgave 3 Konstruer og tegn en endelig tilstands maskin(finite state machine) som med inputalfabet $\mathcal{I} = \{0, 1\}$ og outputalfabet $\mathcal{O} = \{0, 1\}$ gjenkjenner(recognizes) sekvenser på formen 00101.

Løsning 3):
Maskinen skal kunne kjenne igjen strenger av lengde 5, så den trenger 5 tilstander. Maskinen blir seende slik ut:



Oppgave 4 La $M = \{1,2,3,4,5,6\} \times \{1,2,3,4,5,6\}$. Definer en relasjon(relation) $\mathcal{R}$ på M ved at $(x_1, y_1)\mathcal{R}(x_2, y_2)$ dersom $x_1y_1 = x_2y_2$. For eksempel er det ordna paret $\big((1,4),(2,2)\big) \in \mathcal{R}$.

a) Skriv opp, ved å bruke ordnede par(ordered pairs), en eller annen ikke-tom relasjon på M.

Løsning 4a):
En hvilken som helst mengde av par av par

$$\{((a_1, b_1),(c_1, d_1)),((a_2, b_2),(c_2, d_2)), \dots, ((a_k, b_k),(c_k, d_k))\},$$

hvor alle a_i, b_i, c_i, d_i er ett eller annet heltall mellom 0 og 7.

b) Er relasjonen du skrev opp symmetrisk(symmetric)?

Løsning 4b):
Relasjonen er symmetrisk hvis for all par $((a_1, b_1),(c_1, d_1))$ i relasjonen fra a), hvor $(a_1, b_1) \neq (c_1, d_1)$, så er også $((c_1, d_1),(a_1, b_1))$ med i relasjonen.

c) Vis at $\mathcal{R}$ er en ekvivalens-relasjon(equivalence relation) på M.

Løsning 4c):
Refleksivitet: For alle par av tall a, b så er $a \cdot b = a \cdot b$, så $((a, b),(a, b)) \in \mathcal{R}$ for alle par $(a, b) \in M$, så $\mathcal{R}$ er refleksiv.

Symmetri: For alle par av par $((a, b),(c, d)) \in \mathcal{R}$, så betyr dette at $a \cdot b = c \cdot d$, som betyr at $c \cdot d = a \cdot b$, som igjen betyr at $((c, d),(a, b)) \in \mathcal{R}$, så $\mathcal{R}$ er symmetrisk.

Transitivitet: For alle par av par av par $((a, b),(c, d)),((c, d),(e, f)) \in \mathcal{R}$, så betyr dette at $a \cdot b = c \cdot d$ og at $c \cdot d = e \cdot f$. Dette impliserer at $a \cdot b = e \cdot f$, som igjen gir at $((a, b),(e, f)) \in \mathcal{R}$, og $\mathcal{R}$ er transitiv.

d) Hva er ekvivalensklassen(equivalence class) til $(3, 2)$, altså $[(3, 2)]$, gitt av $\mathcal{R}$?

Løsning 4d):
Ekvivalensklassen til $(3, 2)$ er alle par av heltall som multiplisert er lik $3 \cdot 2 = 6$. Med andre ord så er

$$[(3, 2)] = \{(3, 2),(2, 3),(1, 6),(6, 1))\}.$$

Oppgave 5 Bruk matematisk induksjon til å vise at for alle heltall $n \geq 1$, så er

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{2^i}{2} = 2^n - 1.$$

Løsning 5):
Basis-steg:

$$\sum_{i=1}^{1} \frac{2^i}{2} = \frac{2^1}{2} = 1 = 2^1 - 1,$$

så basis-steget er ok. Induksjonsantagelsen: antar at for $k > 1$ så er

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{2^i}{2} = 2^k - 1.$$

Vil vise at denne antagelsen medfører at

$$\sum_{i=1}^{(k+1)} \frac{2^i}{2} = 2^{(k+1)} - 1.$$

Regner ut, starter med venstre side:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{(k+1)} \frac{2^i}{2} &= \frac{2^1}{2} + \frac{2^2}{2} + \cdots + \frac{2^k}{2} + \frac{2^{(k+1)}}{2} \\
&= (2^k - 1) + \frac{2^{(k+1)}}{2} \\
&= 2^k - 1 + 2^k \\
&= 2 \cdot 2^k - 1 \\
&= 2^{(k+1)} - 1,
\end{aligned}$$

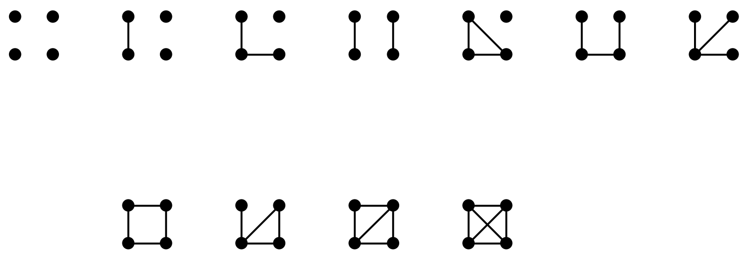
så etter teoremet om matematisk induksjon, så er likheten vist.

Oppgave 6 a) Er disse to grafene isomorfe(isomorphic)?

Løsning 6a):
De er ikke isomorfe. Den venstre har ett hjørne av grad 3, mens den høyre ikke har noen hjørner av grad 3.

b) Finn 11 løkke-frie(loop-free) ikke-isomorfe uretta(non-directed) grafer med 4 hjørner.

Løsning 6b):



c) Vis at de 11 grafene du fant i b) er *alle* mulige løkke-frie ikke-isomorfe uretta grafer med 4 hjørner. Tips: tell kanter.

Løsning 6c):
Tipset sier tell kanter. Vi teller kanter: Grafen øverst til venstre har null kanter, og er selvfølgelig den eneste grafen på fire hjørner som har ingen kanter.

Graf nr 2 fra venstre, øverst har 1 kant, og dette er igjen den eneste mulige, siden løkker ikke er tillatt.

Graf nr 3 og 4 fra venstre, øverst har 2 kanter. Dette betyr at hjørnene tilsammen skal ha grad 4. Siden løkker ikke er tillat, kan ingen hjørner ha høyere grad enn 2, og siden vi skal ha grafer, og ikke multigrafer, så kan bare ett hjørne ha grad 2. Så de eneste to måtene å 'fordele' gradene på er de to viste grafene.

Ett tilsvarende argument for 5, 6 og 7 fra venstre øverst, gir at de eneste 'fordelingene' av grader som er mulig, for 3 kanter, er disse 3.Denne type argumentasjon kan fortsettes.

Alternativt så er graf 1 og 2 fra venstre, nederst, komplementet til hhv 4 og 3 fra venstre øverst. Siden 4 og 3 fra venstre øverst er de eneste med to kanter, er 1 og 2 fra venstre nederst de eneste med 4 kanter. Denne argumentasjonen kan også fortsettes.

Grafen nederst til høyre er K_5, så det er umulig å ha flere kanter enn dette og ikke få en multigraf som ikke er en graf. Husk at en graf er alltid en multigraf, men en multigraf ikke nødvendigvis er en graf.

Det går også an å argumentere via at alle grafene må være undergrafer av K_5, og så studere hvilke grafer som fremkommer når en fjerner kanter.