Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Fasit/løsningsforslag midtsemesterprøve MA0301, v06:

Oppgave 1 Hvilke av de følgende utsagnene er logisk ekvivalente med p?

1. $(p \vee q) \wedge \neg(\neg p \wedge q)$, logisk ekvivalent
2. $(q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q)$, ikke logisk ekvivalent
3. $((q \vee p) \vee \neg(\neg r \vee r)) \wedge ((r \wedge \neg r) \vee (p \vee \neg q))$, logisk ekvivalent
4. $(p \wedge q) \vee q$, ikke logisk ekvivalent

Oppgave 2 Premissene

$$\begin{array}{l} p \to r \\ \neg p \\ r \to t \\ p \vee s, \end{array}$$

logisk impliserer hvilke av de følgende utsagnene?

1. $\neg t$, ikke implisert, ubestemt
2. $\neg s$, ikke implisert, usann
3. s, implisert
4. $p \to t$,implisert

Oppgave 3 Gitt mengden $\mathcal{A} = \{B, C, D, x, \{x, y\}\}$, hvilke utsagn er sanne?

1. $\{x\} \in \mathcal{A}$, usant
2. $\{x, y\} \subseteq \mathcal{A}$, usant
3. $\emptyset \in \mathcal{A}$, usant
4. $\{x, D\} \subseteq \mathcal{A}$, sant

Oppgave 4 Gitt mengdene $\mathcal{B} = \{a, b, \{x, y\}\}$ og $\mathcal{C} = \{\{1, 2\}, \{1\}, a, b\}$, hvor mange forskjellige funksjoner finnes fra $\mathcal{B}$ til $\mathcal{C}$?

1. 4^3, riktig
2. 3^4, feil
3. 4^4, feil
4. 5^4, feil

Oppgave 5 Hva er koeffisienten til x^2y^3w i ekspansjonen til $(x + 2y - 3w)^6$?

1. $\frac{3!}{2!1!}$, feil
2. -1440, riktig
3. $\frac{6!}{2!3!1!}$, feil
4. $\frac{6!}{2!3!1!} \cdot 2^3 \cdot (-3)$, riktig

Oppgave 6 Hvor mange forskjellige løsninger har $x_1+x_2+x_3+x_4 \leq 20$, når $x_i \geq 0$ for $1 \leq i \leq 4$?

1. $\binom{20}{3} = C(20,3)$, feil
2. $\binom{23}{3} = C(23,3)$, feil
3. $\binom{24}{20} = C(24,20)$, riktig
4. $\binom{24}{4} = C(24,4)$, riktig

Oppgave 7 Tatooine Farmers og Coruscant Emperors er på treningsleir. For å gjøre en øvelse skal de gå sammen i par, en fra hvert lag. Hvor mange måter kan dette gjøres på, når det er 11 individer på hvert lag?

1. $P(11,11)$, riktig
2. $11!$, riktig
3. $P(11,2)$, feil
4. $\frac{22!}{11!11!}$, feil

Denne oppgaven kan sees som å telle antall 1-1 funksjoner mellom to mengder av størrelse 11.

Oppgave 8 Finn $|A \cup B \cup C|$ når du får vite at $A \subseteq B$ og at $B \cap C = \emptyset$, samt at $|A| = 30$, $|B| = 41$ og $|C| = 17$.

Benytter formelen fra avsnittet om telling og Venn-diagrammer, side 149. Denne gir at

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$

For å finne $|A \cap B|$ så husk at $A \subseteq B$ gir at $A \cap B = A$. For å finne $|A \cap C|$, så, siden $B \cap C = \emptyset$ og $A \subseteq B$ så er også $A \cap C = \emptyset$. Fra argumentasjonen så langt så får vi også at $A \cap B \cap C = (A \cap B) \cap C = A \cap C = \emptyset$. Tilsammen gir dette at

$$\begin{aligned}|A \cup B \cup C| &= |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| \\ &= |A| + |B| + |C| - |A| - |\emptyset| - |\emptyset| + |\emptyset| \\ &= 30 + 41 + 17 - 30 - 0 - 0 - 0 \\ &= 58\end{aligned}$$

Oppgave 9 Bruk matematisk induksjon til å vise at $\sum_{i=1}^{n} i(2^i) = 2 + (n-1)2^{n+1}$ for alle heltall $n \geq 1$.

Her er $S(n) : \sum_{i=1}^{n} i(2^i) = 2 + (n-1)2^{n+1}$. Vi skal vise at dette utsagnet er sant for alle heltall $n \geq 1$.
Basissteg: Vise at $S(1)$ holder:

$$\sum_{i=1}^{1} i(2^i) = 1 \cdot 2^1 = 2 = 2 + 0 \cdot 2^2 = 2 + (1-1)2^{1+1}.$$

Induksjonssteg: Anta at $S(k)$ er sann, dvs at

$$\sum_{i=1}^{k} i(2^i) = 2 + (k-1)2^{k+1}.$$

Vil vise at denne antagelsen medfører at $S(k+1)$ er sann, dvs at

$$\sum_{i=1}^{k+1} i(2^i) = 2 + ((k+1)-1)2^{(k+1)+1}.$$

Regner ut:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{k+1} i(2^i) &= 2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \ldots + k \cdot 2^k + (k+1)2^{k+1} \\
&= \sum_{i=1}^{k} i(2^i) + (k+1)2^{k+1} \\
&= 2 + (k-1)2^{k+1} + (k+1)2^{k+1} \\
&= 2 + ((k-1) + (k+1))2^{k+1} \\
&= 2 + (k+k)2^{k+1} \\
&= 2 + 2k2^{k+1} \\
&= 2 + k2^{k+2}.
\end{aligned}$$

Den tredje likheten framkommer når vi bruker induksjonsantagelsen. $S(n)$ er nå vist sant for alle positive heltall n, ved matematisk induksjon.