Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Førsteamanuensis Per Hag, Telefon: 91743

MA1101 Grunnkurs i analyse I

Bokmål
Fredag 17. desember 2004
Kl. 9-13
Hjelpemidler: Godkjent kalkulator (HP30S)
Sensur: 17. januar 2005

I oppgave 1 - 5 skal svarene begrunnes. I oppgave 6 skal du bare skrive R eller G i rutene til høyre. Arket med oppgave 6 skal innleveres.

Oppgave 1

a) Skisser det området i 1. kvadrant som er begrenset av kurvene:

$$y = \frac{4}{x^2} \qquad \text{og} \qquad y = 5 - x^2.$$

b) Beregn arealet av området angitt i a).

Oppgave 2

Bestem grenseverdien:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos 2x}{1 - \cos x}.$$

Oppgave 3

Beregn integralene:

(i)
$$\int x^2 e^{-x} dx$$

(ii)
$$\int_1^2 \sqrt{x} e^{-\sqrt{x}} dx.$$

Oppgave 4

Et rektangel skal innskrives i en halvsirkel med radius 1 slik at en side i rektangelet faller langs halvsirkelens diameter. Bestem sidelengdene for det rektangelet som under denne forutsetning har størst mulig areal.

Oppgave 5

a) Vi definerer funksjonen $y = \ln x$ for alle $x > 0$ ved
$$\ln x = \int_1^x \frac{dt}{t}.$$
Vis at $\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}$. Er funksjonen $y = \ln x$ kontinuerlig i $]0, \infty[$? Begrunn svaret.

b) La f være en funksjon som er definert for $x = x_0$ og videre være slik at den har en invers funksjon f^{-1} i et åpent intervall som inneholder $y_0 = f(x_0)$. Dersom også $f'(x_0) \neq 0$, kan det bevises at f^{-1} er deriverbar i $y = y_0$. (Bevis for denne påstanden kreves ikke!) Vis at da gjelder:
$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$
[Vink: Benytt kjerneregelen og det faktum at $f^{-1}(f(x)) = x$.]

c) La exp være den inverse funksjonen til funksjonen $y = \ln x$ i a). Vis ved hjelp av a) og b) at
$$\frac{d}{dy}(\exp y) = \exp y.$$

STUDENTNUMMER:

Dette arket skal besvares og leveres inn.

Oppgave 6

Merk av R (riktig) eller G (galt) i ruten til høyre. Her kreves ingen begunnelse.

(i) Hvis $\lim_{x\to a} f(x)$ eksisterer og $\lim_{x\to a} g(x)$ ikke eksisterer, så kan allikevel $\lim_{x\to a}(f(x)+g(x))$ eksistere. ☐

(ii) Hvis funksjonen f er odde og dessuten deriverbar for alle reelle tall, så er f' en like funksjon. ☐

(iii) Hvis $\lim_{x\to a} f(x) = L > 0$, $g(x) > 0$ for alle x og $\lim_{x\to a} g(x) = 0$, så er $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \infty$. ☐

(iv) Hvis funksjonen f er deriverbar i $x = x_0$ så har f et lokalt ekstremum i $x = x_0$ hvis og bare hvis $f'(x_0) = 0$. ☐

(v) Hvis g er kontinuerlig i $[a, b]$, deriverbar i $]a, b[$ og $g(a) = g(b)$, så finnes et punkt $c \in\,]a, b[$ slik at $g'(c) = 0$. ☐