Eksamen i MA1101, 5. desember 2005 - løsningsforslag

Oppgave 1 La

$$f(x) = x^2 e^{-x}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

a) Funksjonen f er deriverbar i hele $\mathbb{R}$. Vi bruker produktregelen og får

$$f'(x) = \frac{d}{dx} f(x) = \frac{d}{dx} x^2 \cdot e^{-x} + x^2 \cdot \frac{d}{dx} e^{-x} = e^{-x}\left(2x - x^2\right).$$

Den deriverte f' er også deriverbar i $\mathbb{R}$, og ved å bruke produktregelen igjen får vi:

$$f''(x) = \frac{d}{dx} e^{-x} \cdot \left(2x - x^2\right) + e^{-x} \frac{d}{dx}\left(2x - x^2\right) = e^{-x}\left(x^2 - 4x + 2\right).$$

b) Siden f er deriverbar i $\mathbb{R}$, vil de lokale ekstremalverdiene opptre der $f'(x) = 0$. Vi får at $f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^{-x}(2x - x^2) = 0 \Leftrightarrow (2x - x^2) = x(2 - x) = 0$. Altså har f kritiske punkt i $x = 0$ og $x = 2$. Videre er $f''(0) = 2e^0 = 2 > 0$, mens $f''(2) = -2/e^2 < 0$. Ved annenderiverttesten kan vi konkludere med at funksjonen f har et lokalt minimum i $x = 0$, mens den har et lokalt maksimum i $x = 2$.

Den lokale minimumsverdien blir $f(0) = 0 \cdot e^0 = 0$, mens den lokale maksimumsverdien blir $f(2) = 2^2 e^{-2} = 4/e^2$. Siden $f(x) \geq 0$ for alle x, må$(0, 0)$ være et absolutt minimumspunkt. Funksjonen har ingen absolutt maksimumsverdi, siden $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty$. (Se under 1c).)

Siden f'' finnes i hele $\mathbb{R}$, må eventuelle vendepunkt opptre der $f''(x) = 0$. Vi får at $f''(x) = 0 \Leftrightarrow e^{-x}\left(x^2 - 4x + 2\right) = 0 \Leftrightarrow \left(x^2 - 4x + 2\right) = 0$. Det vil si at vi får eventuelle vendepunkt for

$$x = 2 - \sqrt{2} \text{ og } x = 2 + \sqrt{2}.$$

Vi ser at $f''(x) = e^{-x}(x - (2 + \sqrt{2}))(x - (2 - \sqrt{2})) > 0$ for $x < 2 - \sqrt{2}$ og $x > 2 + \sqrt{2}$ og $f''(x) < 0$ for $2 - \sqrt{2} < x < 2 + \sqrt{2}$. Derfor skifter f'' fortegn i $x = 2 + \sqrt{2}$ og $x = 2 - \sqrt{2}$, slik at (grafen til) f har vendepunkt i $x = 2 + \sqrt{2}$ og $x = 2 - \sqrt{2}$. (En kan for eksempel drøfte fortegnet til f'' ved hjelp av et fortegnsskjema.)

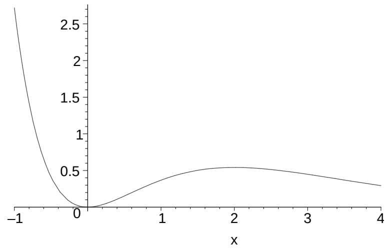
c) Linjen $y = 0$ (d.v.s. x-aksen) er en horisontal asymptote for (grafen til) f fordi

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} x^2 e^{-x} = 0.$$

(Bruk setning fra lærebok eller L'Hôpitals regel.) Funksjonen har ingen vertikale asymptoter fordi f er definert i hele $\mathbb{R}$. Hvis f skal ha en skrå asymptote, må $\lim_{x\to-\infty}(x^2e^{-x}-(ax+b)) = 0$ for en linje $y = ax + b$. Men

$$\lim_{x\to-\infty}(x^2e^{-x} - (ax+b)) = \lim_{x\to-\infty}\frac{x^3e^{-x} - ax^2 - bx}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{e^{-x} - \frac{a}{x} - \frac{b}{x^2}}{\frac{1}{x^2}} = \infty.$$

Derfor har f ingen skrå asymptoter.



Oppgave 2

a) Ved å bruke delbrøkoppspaltning får vi

$$\frac{1}{2x^2-1} = \frac{1}{2}\frac{1}{(x^2-1/2)} = \frac{1}{2}\frac{1}{(x-1/\sqrt{2})(x+1/\sqrt{2})}$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{1}{x-1/\sqrt{2}} - \frac{1}{x+1/\sqrt{2}}\right).$$

Derfor får vi

$$\int\frac{dx}{2x^2-1} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\int\left(\frac{1}{x-1/\sqrt{2}} - \frac{1}{x+1/\sqrt{2}}\right)dx = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\ln|x-1/\sqrt{2}| - \ln|x+1/\sqrt{2}|\right) + C$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x-1/\sqrt{2}}{x+1/\sqrt{2}}\right| + C$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}x-1}{\sqrt{2}x+1}\right| + C.$$

b) Vi skriver først

$$\int\frac{\sin\theta\,d\theta}{\sin^2\theta-\cos^2\theta} = \int\frac{\sin\theta\,d\theta}{1-\cos^2\theta-\cos^2\theta} = \int\frac{\sin\theta\,d\theta}{1-2\cos^2\theta}.$$

Deretter bruker vi substitusjonen $u = \cos\theta$, slik at vi får $-du = \sin\theta d\theta$. Vi får altså

$$\int\frac{\sin\theta\,d\theta}{1-2\cos^2\theta} = \int\frac{-du}{1-2u^2} = \int\frac{du}{2u^2-1} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{u-1/\sqrt{2}}{u+1/\sqrt{2}}\right| + C.$$

Her brukte vi svaret fra a) i den siste likheten. (Det er selvfølgelig unødvendig å beregne dette integralet "på nytt", men en bør gi en henvisning.) Derfor får vi

$$\int\frac{\sin\theta\,d\theta}{\sin^2\theta-\cos^2\theta} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\cos\theta-1/\sqrt{2}}{\cos\theta+1/\sqrt{2}}\right| + C.$$

Oppgave 3

a) Ved faktorisering får vi

$$\lim_{x\to 1+} \frac{x^2+2x-3}{x^2-1} = \lim_{x\to 1+} \frac{(x-1)(x+3)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x\to 1+} \frac{x+3}{x+1} = \frac{4}{2} = 2.$$

(Her er det også mulig å bruke L'Hôpitals regel.)

b) Vi skriver først uttrykket som en brøk:

$$\lim_{x\to 0+} \left(\frac{3}{x} - \frac{\ln(1+3x)}{x^2} \right) = \lim_{x\to 0+} \left(\frac{3x - \ln(1+3x)}{x^2} \right).$$

Siden $\lim_{x\to 0+} \ln(1+3x) = 0$ er dette et ubestemt uttrykk av typen $[0/0]$. Teller og nevner er begge deriverbare for $x > 0$, så vi kan bruke L'Hôpitals regel:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0+} \left(\frac{3}{x} - \frac{\ln(1+3x)}{x^2} \right) &= \lim_{x\to 0+} \left(\frac{3x - \ln(1+3x)}{x^2} \right) \\
&\overset{L'H.}{=} \lim_{x\to 0+} \left(\frac{3 - 3(1+3x)^{-1}}{2x} \right) \\
&= \lim_{x\to 0+} \left(\frac{3 + 9x - 3}{2x(1+3x)} \right) \\
&= \frac{9}{2}.
\end{aligned}$$

Oppgave 4 Ligningen er på formen $y' + p(x)y = q(x)$, med $p(x) = -1/x$ og $q(x) = x/\sqrt{1-x^2}$. Altså er det en førsteordens lineær ligning. Vi lar

$$\mu(x) = \int p(x)dx = \int \frac{-1}{x}dx = -\ln|x| = \ln\frac{1}{|x|} = \ln\frac{1}{x},$$

der $|x| = x$ fordi $x \in \,]0,1[$. Vi ser nå på

$$\frac{d}{dx}\left(e^{\mu(x)}y\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\cdot y\right) = \frac{1}{x}y' - \frac{1}{x^2}y = \frac{1}{x}\left(y' - \frac{1}{x}y\right) = \frac{1}{x}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Derfor får vi

$$\frac{1}{x}\cdot y = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \sin^{-1} x + C.$$

Med andre ord blir den generelle løsningen av ligningen:

$$y = x\sin^{-1} x + Cx, \quad x \in \,]0,1[.$$

For å finne den spesielle løsningen setter vi:

$$\frac{\pi}{6} = y\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}C = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{6} + C\right).$$

Derfor får vi $C = \pi/6$. Den spesielle løsningen av ligningen som tilfredsstiller $y(1/2) = \pi/6$ er derfor

$$y = x \sin^{-1} x + \frac{\pi}{6} x, \quad x \in \,]0, 1[.$$

Oppgave 5 La g være en funksjon som er kontinuerlig i $[0, 1]$ og deriverbar i $]0, 1[$, med $g(0) = 1$ og $g(1) = 0$.

a) Siden g er kontinuerlig er også funksjonen $h(x) = g(x) - x$ kontinuerlig. Videre er $h(0) = g(0) - 0 = 1$, mens $h(1) = g(1) - 1 = -1$. Ved skjæringssetningen (mellomverdisetningen, intermediate value theorem) må det finnes et tall $c \in \,]0, 1[$ med $h(c) = 0$. Men da er $0 = h(c) = g(c) - c$, slik at $g(c) = c$.

b) Siden g er deriverbar i $]0, 1[$ og kontinuerlig i $[0, 1]$ kan vi bruke sekantsetningen (middelverditeoremet, mean value theorem) til å konkludere med at der finnes et tall d i $]0, 1[$ slik at

$$\frac{g(1) - g(0)}{1 - 0} = g'(d).$$

Altså er

$$g'(d) = \frac{g(1) - g(0)}{1 - 0} = \frac{0 - 1}{1} = -1.$$