MA1101
- oppsummering så langt

Torsdag 29. september 2005

http://www.math.ntnu.no/emner/MA1101/2005h/

Pensum til semesterprøven

- Kapittel P
- Kapittel 1
- Kapittel 2: avsnittene 2.1-2.9
- Kapittel 4: avsnitt 4.1

Semesterprøve: detaljer

Dato: Tirsdag 4. oktober

Tidspunkt: 08.00-10.00 (møt opp presis!)

Varighet: Prøven varer i 90 min.

Sted: Alle med etternavn A t.o.m. J møter i KJL 5
Alle med etternavn K t.o.m. Å møter i S2 (Aa møter også i S2)

Hjelpemidler: Kalkulator HP30S

Husk legitimasjon og semesterkort!

Viktige funksjoner

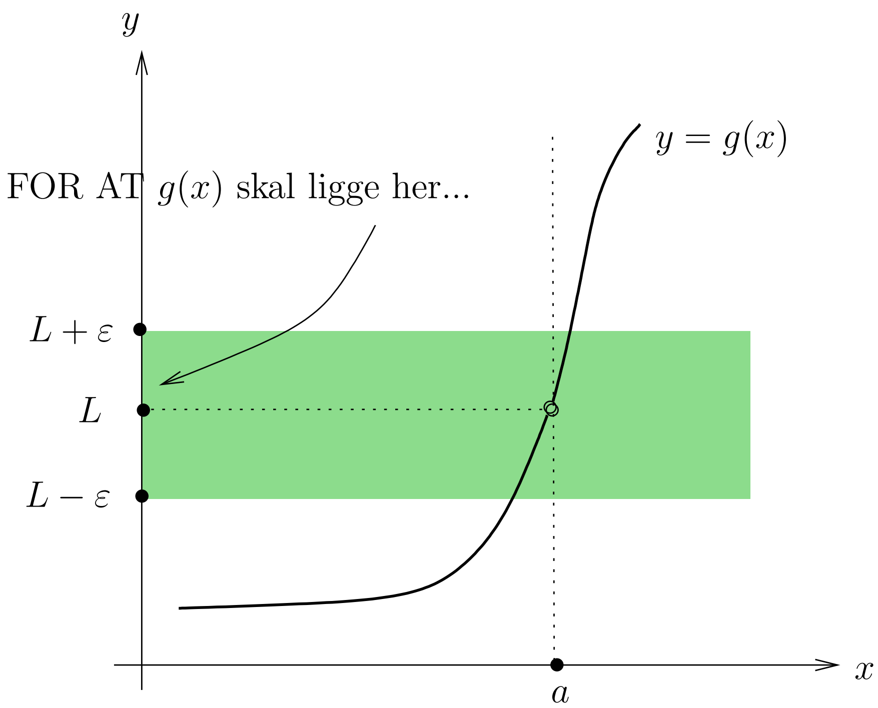
- $f(x) = |x| = \begin{cases} x, & \text{hvis } x \geq 0 \\ -x, & \text{hvis } x < 0. \end{cases}$
- Polynomfunksjoner:
  $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$
- Rasjonale funksjoner: $R(x) = P(x)/Q(x)$
- Potensfunksjoner: $f(x) = \sqrt{x}$, $f(x) = x^r, r \in \mathbb{R}$
- Trigonometriske funksjoner:

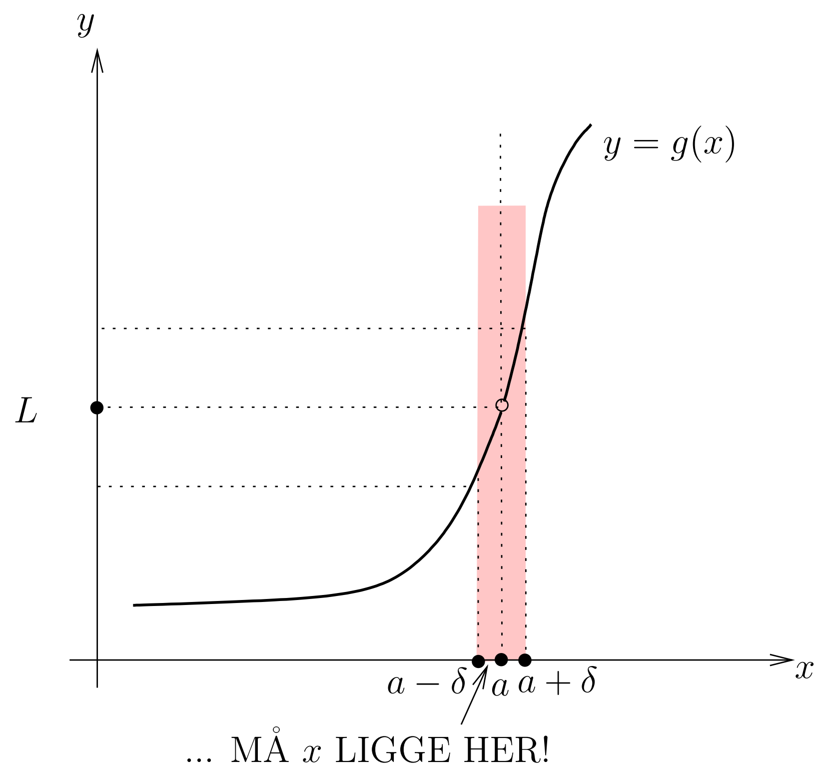
$$f(x) = \sin x,\ g(x) = \cos x,\ h(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

Grenseverdier

- Vi sier at $\lim_{x \to a} g(x) = L$ dersom følgende holder:
  For hver $\varepsilon > 0$ finnes en $\delta > 0$ slik at

$$0 < |x - a| < \delta \ \text{ impliserer } \ |g(x) - L| < \varepsilon.$$





Beregning av grenseverdier

- Hvis $\lim_{x\to a} f(x) = L$ og $\lim_{x\to a} g(x) = M$ så er

$$\lim_{x\to a} (f(x) \pm g(x)) = L \pm M$$

$$\lim_{x\to a} (f(x)g(x)) = LM$$

$$\lim_{x\to a} \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{L}{M}$$

(når $\lim_{x\to a} g(x) = M \neq 0$)

$$\lim_{x\to a} (f(x))^{m/n} = L^{m/n}$$

Disse bruker vi hele tiden!

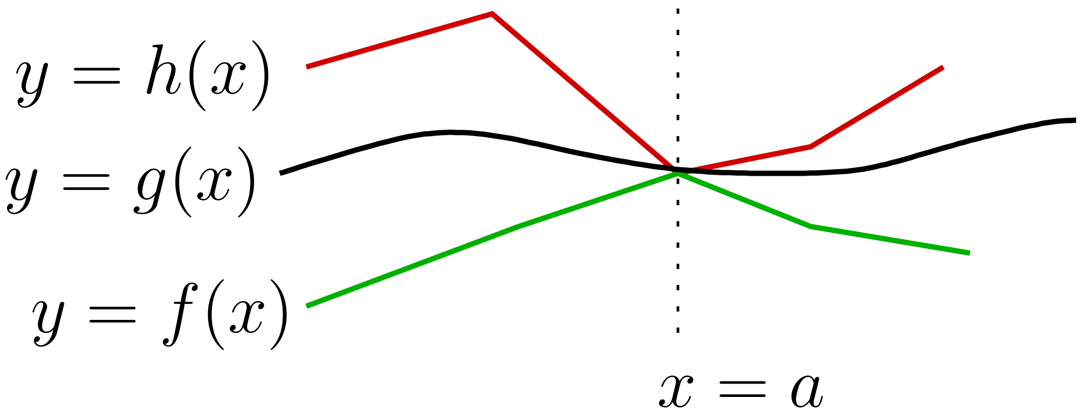
“Squeeze” teoremet (s.69)

Sett at $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ for alle x i et intervall som inneholder a (muligens bortsett fra i a). Sett at

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} h(x) = L.$$

Da er

$$\lim_{x \to a} g(x) = L.$$



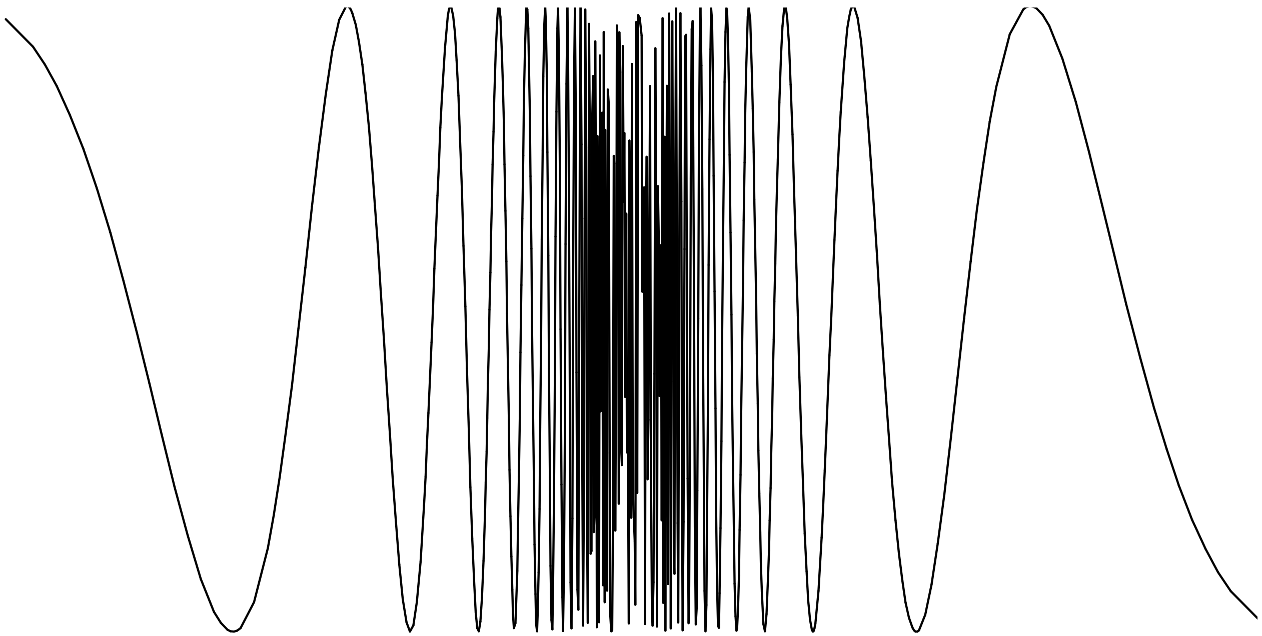
Eks.: oppgavene 78, 79 (og 74-75) s. 71

En viktig grenseverdi

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

$$\lim_{x\to 0} \sin \frac{1}{x}$$

finnes ikke!



Kontinuitet

Funksjonen f er kontinuerlig i $c \in \mathcal{D}(f)$ hvis

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c).$$

Greit å huske på: For at f skal være kontinuerlig i c må

- f være definert i c
- $\lim_{x \to c-} f(x) = \lim_{x \to c+} f(x) = f(c)$

Noen kontinuerlige funksjoner

- $f(x) = |x| = \begin{cases} x, & \text{hvis } x \geq 0 \\ -x, & \text{hvis } x < 0. \end{cases}$
- Polynomfunksjoner:
  $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$
- Rasjonale funksjoner: $R(x) = P(x)/Q(x)$
- Potensfunksjoner: $f(x) = \sqrt{x}$, $f(x) = x^r, r \in \mathbb{R}$
- Trigonometriske funksjoner:

$$f(x) = \sin x, \; g(x) = \cos x, \; h(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

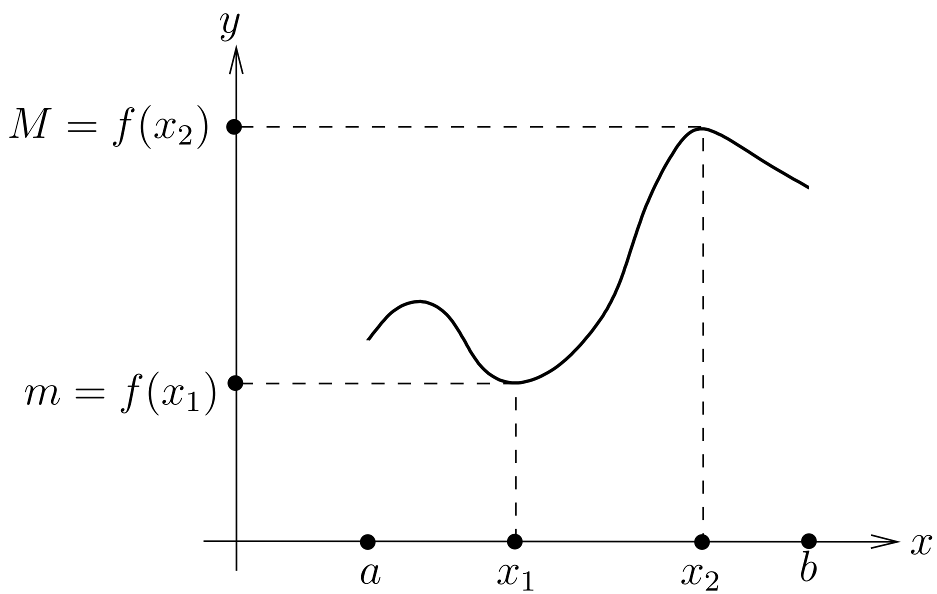
NB: alle disse funksjonene er kontinuerlige der de er definert!

Ekstremalverdisetningen (s. 83)

Hvis $f(x)$ er en kontinuerlig funksjon i $[a, b]$, så finnes x_1 og x_2 i $[a, b]$ slik at for alle x i $[a, b]$ så er

$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2).$$

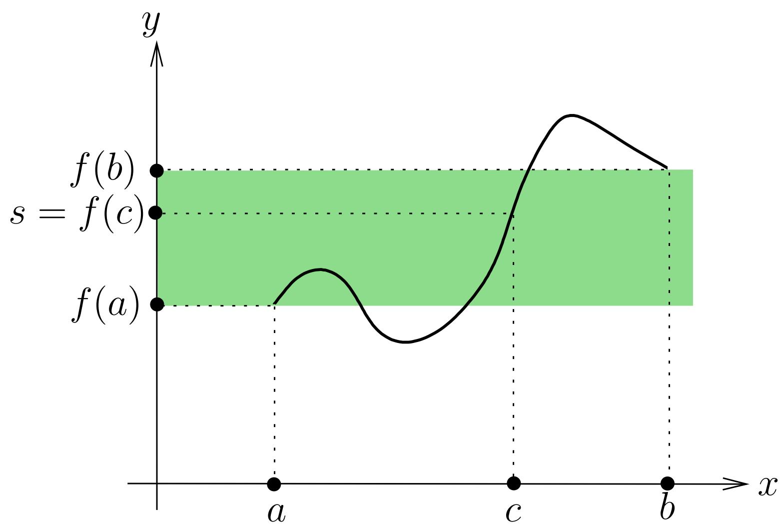
Altså: f har en absolutt minimalverdi $m = f(x_1)$ og en absolutt maksimalverdi $M = f(x_2)$ i $[a, b]$.



Mellomverdisetningen (s. 85) (også kalt skjæringssetningen)

Hvis f er kontinuerlig på intervallet $[a,b]$, og hvis s er et tall mellom $f(a)$ og $f(b)$, så finnes et tall c i $[a,b]$ slik at

$$f(c) = s.$$



Eks: oppgave 29, s.88

Den dervierte

- Den deriverte

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

- Tangentlinjer

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Eks: oppgave 21, s.111.

Derivasjonsregler

- $\frac{d}{dx}x^r = rx^{r-1}$.
- $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$
- $(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$.
- Kvotient(brøk)regelen:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$$

- $\frac{d}{dx}\sin x = \cos x$
- $\frac{d}{dx}\cos x = -\sin x$
- $\frac{d}{dx}\tan x = \frac{1}{\cos^2 x}$

Kjerneregelen

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

$y = f(u), u = g(x)$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

Eks.: oppgave 13, s. 125
Eks.: oppgave 31, s. 131

Implisitt derivasjon

Eksempel (O.11, s. 156) Finn en ligning for tangenten til

$$\frac{x}{y} + \left(\frac{y}{x}\right)^3 = 2$$

i $(-1, -1)$.

Deriverbarhet og kontinuitet

Husk på:

$$f \text{ deriverbar i } x \Rightarrow f \text{ kontinuerlig i } x$$

Men *ikke* motsatt:

$f(x) = |x|$ er kontinuerlig i $x = 0$, men ikke deriverbar der, fordi

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{|h| - 0}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{|h|}{h}$$

ikke finnes!

Induksjonsprinsippet (s. 113)

La $P(n)$ betegne et utsagn om det naturlige tallet n. Anta at

(i) $P(n_0)$ er sant;

(ii) Dersom $P(k)$ er sant for et tall k, så er også $P(k+1)$ sant.

Da er $P(n)$ sant for alle naturlige tall $n \geq n_0$.

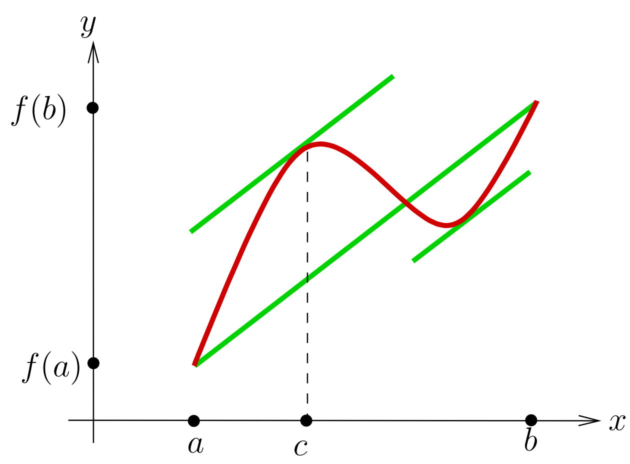
Eks.: oppgave 13, s.150

Sekantsetningen (s. 133)

Anta:

- at f er kontinuerlig i $[a, b]$
- at f er deriverbar i $]a, b[$.

Da finnes en $c \in]a, b[$ slik at $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$.



Eks.: oppgave 5, s. 139

Voksende og avtagende funksjoner

Anta f

- deriverbar i $J =]a, b[$,
- kont. i $I = [a, b[,]a, b], [a, b]$ eller $]a, b[$

Da

- $f'(x) > 0$ i $J \Rightarrow$ **voksende** i I
- $f'(x) < 0$ i $J \Rightarrow$ **avtagende** i I
- $f'(x) \geq 0$ i $J \Rightarrow$ **ikke avtagende** i I
- $f'(x) \leq 0$ i $J \Rightarrow$ **ikke voksende** i I

Eks.: oppgave 9, s.139

Koblede hastigheter

Oppgave 5, s. 237

Arealet av en sirkel avtar med $1/3$ km^2/t. Uttrykk endringsraten til radien som en funksjon av

(a) radien r

(b) arealet A av sirkelen