SEMESTERPRØVE MA1101 HØSTEN 2005:
KOMMENTAR TIL BESVARELSENE

For fullstendig løsning, se nettsidene!

Oppgave 1.

(a). Praktisk talt alle klarte dette punktet.

(b). Stort sett bra besvart, men noen blandet sammen drøfting av $f'(x) = 3(x-1)(x-\frac{1}{3})$ med drøfting av $f''(x)$. Disse ting skulle være velkjent fra skolematematikken. Noen har problemer med å huske formelen for røttene i annengradsligningen. Om en er i tvil om de to verdiene x_1, x_2 som er funnet, bør en jo kunne sjekke om $3x^2 - 4x + 1$ virkelig blir lik 0 ved innsetting av $x = x_1$ og $x = x_2$.

Svaret på denne oppgaven er: f vokser i $]-\infty, \frac{1}{3}]$ og i $[1, \infty[$, f avtar i $[\frac{1}{3}, 1]$. Hvorfor må endepunktene være med, når vi vet at $f'(\frac{1}{3}) = f'(1) = 0$? Fordi f. eks. $f(\frac{1}{3}) > f(x) > 1$ når $\frac{1}{3} < x < 1$. Vi har:

$$f'(x) > 0 \text{ for alle } x \in \mathbb{R} \Longrightarrow f \text{ strengt voksende.}$$

Men denne implikasjonen kan ikke snus! Se f. eks. på $y = x^3$. $y' = 0$ for $x = 0$, men funksjonen er strengt voksende i hele $\mathbb{R}$. (Se også oppgave 15, s. 139 i Adams.)

(c). En bør regne ut noen få y-verdier, f. eks. $f(0), f(1/3), f(1)$ for å få en noenlunde riktig skisse. Aller viktigst her er det å få overensstemmelse mellom resultatene i (b) og skissen. Det bør også antydes på figuren at $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ og $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$.

Oppgave 2.

(a). Det er egentlig unødvendig (og litt farlig?) å omforme til $(xy+2)^2 = y + x^2 + 1$. Men stort sett klarer de som har lært seg implisitt derivasjon å komme frem til riktig svar. Det er tungvint å regne seg frem til et generelt uttrykk for y' ved x og y, og så sette inn $x = 1, y = -1$. Sett heller inn disse verdiene for x og y allerede i

$$y + xy' = \frac{1}{2}(y + x^2 + 1)^{-\frac{1}{2}}(y' + 2x),$$

og bestem y' ut fra dette uttrykket. Noen kaller *hele uttrykket* $xy + 2$ for y - og setter opp: $\frac{dy}{dx} = y + xy' =$ o.s.v. Men da betyr jo y to forskjellige ting i samme ligning, og det må jo bli tøv!

(b). Stort sett riktig - men noen *tør* kanskje ikke regne på dette punktet fordi de ikke har fått til (a). Men svaret i (a) er jo gitt nettopp fordi man skal kunne regne (b)! *Husk på sånt til eksamen!*

Oppgave 3.

(a). De fleste kom i havn her, men noen må bruke brøkregelen for å finne $\frac{d}{dx}x^{-2}$. *Det virker svært kløνet.* Bruk regelen $\frac{d}{dx}x^r = rx^{r-1}$.

(b). Stort sett svakt besvart. Alt for mange sier at grensen ikke eksisterer fordi $0 \cdot \cos(\frac{1}{0^2})$ ikke eksisterer. *Dette vitner om manglende forståelse av grensebegrepet.* Vi kan her vise at for alle $\varepsilon > 0$ finnes det $\delta > 0$ slik at $0 < |x| < \delta$ medfører $|x\cos(\frac{1}{x^2}) - 0| < \varepsilon$. [1] Noen har benyttet at siden $|\cos(\frac{1}{x^2})| \leq 1$ og $\lim_{x\to 0} x = 0$, så vil $\lim_{x\to 0} x\cos(\frac{1}{x^2}) = 0$. Riktig idé, men dessverre ikke bevist hos Adams. (Oppgave: bevis nedenstående **Teorem** selv!)

Verste svar: Man finner først at $\lim_{x\to 0} g(x)$ ikke eksisterer - og konkluderer likevel at g er kontinuerlig i $x = 0$. Se på definisjonen på side 79 i Adams.

Mange viser at $\lim_{x\to 0} g(x) = 0$ *og glemmer å presisere at oppgaven gir at* $g(0) = 0$, og siden

$$\lim_{x\to 0} g(x) = g(0),$$

så er funksjonen kontinuerlig i punktet $x = 0$.

Teorem. *Dersom*

$$\lim_{x\to a} \varphi(x) = 0$$

og $|\psi(x)| \leq M$ *for* $0 < |x - a| < \delta_0$ *(for en* $\delta_0 > 0$*), så er*

$$\lim_{x\to a} (\varphi(x)\psi(x)) = 0.$$

(c). Svært få fikk noe positivt ut av dette punktet. Mange startet slik:

$$(*) \qquad \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)\cos\left(\frac{1}{(x+h)^2}\right) - x\cos\left(\frac{1}{x^2}\right)}{h}.$$

Men dette utrrykket kan jo (i følge oppgavens definisjon og sunn fornuft) ikke benyttes for $x = 0$: $g(0) = 0$ ved definisjon! Altså skal vi studere

$$\lim_{h\to 0} \frac{g(0+h) - g(0)}{h} = \lim_{x\to 0} \frac{h\cos\left(\frac{1}{h^2}\right) - 0}{h}$$

for å vurdere om $g'(0)$ eksisterer eller ikke (den gjør ikke det). Grensen (*) vil gi $g'(x)$ for $x \neq 0$. Men denne er jo allerede funnet i punkt (a) på mye enklere måte. Ut fra (a) vet vi dermed at (*) eksister når $x \neq 0$ - noe mange påstår at den ikke gjør etter en del merkelige regnemessige krumspring!

Per Hag, 13. oktober 2005

[1] Legg merke til at vi antar at $0 < |x|$!