SEMESTERPRØVE MA1101 HØSTEN 2005 - LØSNINGSFORSLAG

Oppgave 1.

a). Den deriverte blir: $f'(x) = 3x^2 - 2 \cdot 2x + 1 = 3x^2 - 4x + 1$.

b). Funksjonen f er voksende der $f'(x) > 0$ og avtagende der $f'(x) < 0$. Ved faktorisering får vi

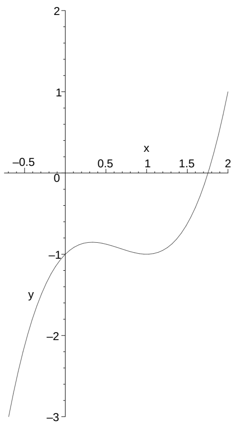
$$f'(x) = 3x^2 - 4x + 1 = 3(x - \frac{1}{3})(x - 1).$$

Drøft fortegne til $f'(x)$ ved hjelp av et fortegnsskjema. Vi får at $f'(x) > 0$ i $]-\infty, \frac{1}{3}[\cup]1, \infty[$ og $f'(x) < 0$ i $]\frac{1}{3}, 1[$. Derfor er f

- voksende i $]-\infty, \frac{1}{3}] \cup [1, \infty[$
- avtagende i $[\frac{1}{3}, 1]$.

(Merk at i følge Teorem 12, s. 135, i læreboken er det riktig å ta med endepunktene i intervallene!)

c). En skisse av grafen til $y = f(x)$:



Oppgave 2.

a). Ved implisitt derivasjon får vi

$$1 \cdot y + x \cdot y' = \frac{y' + 2x}{2\sqrt{y + x^2 + 1}}.$$

Stigningstallet i $(1, -1)$ finner vi ved å sette $x = 1$ og $y = -1$ inn i denne ligningen:

$$-1 + 1 \cdot y' = \frac{y' + 2}{2\sqrt{-1 + 1 + 1}}$$

$$y' - \frac{1}{2}y' = 1 + 1$$

$$y'|_{(1,-1)} = 4.$$

b). Tangentlinjen til en kurve i (x_0, y_0) er gitt ved

$$y = y_0 + y'_{(x_0,y_0)}(x - x_0),$$

som gir

$$y = -1 + 4(x - 1) = 4x - 5.$$

Oppgave 3.

a). Når $x \neq 0$ er

$$g(x) = x\cos(x^{-2}).$$

Vi får da

$$\begin{aligned} g'(x) &= 1 \cdot \cos(x^{-2}) + x \cdot (-1)\sin(x^{-2}) \cdot (-2)x^{-3} \\ &= \cos(x^{-2}) + 2x^{-2}\sin(x^{-2}). \end{aligned}$$

b). Vi svarer først på spørsmålet om grensen finnes, og finner grensen.

Alternativ 1:

Siden vi alltid har at $-1 \leq \cos(x^{-2}) \leq 1$ for $x \neq 0$ får vi

$$-x \leq x\cos(x^{-2}) \leq x$$

når $x \geq 0$ og

$$x \leq x\cos(x^{-2}) \leq -x$$

når $x < 0$. Vi vet også at $\lim_{x\to 0}(-x) = \lim_{x\to 0} x = 0$. Derfor må også

$$\lim_{x\to 0} x\cos(x^{-2}) = 0$$

ved Teorem 4, s.69 ("Squeeze"-teoremet).

Alternativ 2:

Gitt $\varepsilon > 0$. Legg merke til at $|\cos(x^{-2})| \leq 1$ for $x \neq 0$. Velg $\delta = \varepsilon$. Da får vi, med $0 < |x| < \delta = \varepsilon$ at

$$|x\cos(x^{-2})| \leq |x| < \varepsilon,$$

og derfor er $\lim_{x\to 0} g(x) = 0$.

Så svarer vi på spørsmålet om kontinuitet:

Vi har nettopp sett at

$$\lim_{x\to 0} g(x) = 0 = g(0).$$

Da er g kontinuerlig i $x = 0$.

c). Hvis $g'(0)$ skal finnes må følgende grense finnes

$$g'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{g(0+h) - g(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h\cos(h^{-2}) - 0}{h} = \lim_{h\to 0} \cos(h^{-2}).$$

Men vi fikk oppgitt at $\lim_{h\to 0} \cos(h^{-2})$ ikke finnes, og dermed er ikke g deriverbar i $x = 0$.