MA1101
∼
Grunnkurs i analyse I

Høstsemesteret 2005

http://www.math.ntnu.no/emner/MA1101/2005h/

Forelesninger og øvinger

Lærebok: R. A. Adams, *Calculus - A complete course*, 5. utg.

Kalkulator: HP 30S

Forelesninger: Tirsdag og torsdag, 8.15-10.00 i KJL 5; onsdag 18.15-19 i KJL 5.

Gruppeøvinger:

- Mandag 08.15-10.00 i R52 og R20 (BFY, BKJ)
- Tirsdag 14.15-16.00 i R40 og VG21 (BFY, BMAST, ÅMATSTAT)
- Onsdag 08.15-10.00 i R21 og R41 (BBI, MBI , MBIOT, MBIOT5, MLREAL)
- Torsdag 14.15-16.00 i R50 og VG21 (BFY, BGEOL, BMAST, ÅMATSTAT)

Pensum og evaluering

Pensum: Kap P-7 (ikke alt!), + appendiks II og III.

Vurdering:

- Semesterprøve (teller kun positivt)
  - Teller: 20%, men evt. kun i positiv retning
  - Varighet: 1 t 30 min (90 min) skriftlig
  - Hjelpemidler: HP30S kalkulator
  - **Dato**: Tirsdag 4. oktober kl. 8.00-10.00
- Avsluttende eksamen
  - Teller 80% av den endelige karakteren.
  - Varighet: 4 timer, skriftlig
  - Hjelpemidler: HP30S kalkulator
  - **Dato**: Mandag 5. desember.

Øvingsopplegg

- Øvinger holdes i ukene: 35-48, hver uke.
- Oppgavene kommer uken før (se kurshjemmeside).
- På øvingene får dere individuell veiledning.
- For å få ta eksamen i kurset kreves 5 godkjente/beståtte tester.
- Testene holdes i øvingstimene, og baserer seg på oppgavene som er gitt til øvinger i de to foregående ukene. (Unntatt test i uke 36, som bygger kun på øving 1 i uke 35.)
- Testene holdes i ukene: 36, 38, 40, 42, 44, 46 og 48.
- Uke 40: bestått midtsemesterprøve teller som en bestått test.
- I tillegg gis en hjemmøving mot slutten av semesteret som også teller som en test (hvis godkjent).

Semesterprøve: detaljer

Dato: Tirsdag 4. oktober

Tidspunkt: 08.00-10.00

Sted: Alle med etternavn A t.o.m. J møter i KJL 5
Alle med etternavn K t.o.m. Å møter i S2

Hjelpemidler: Kalkulator HP30S

Pensum:

- Kapittel P
- Kapittel 1
- Avsnittene 2.1-2.9
- Avsnit 4.1

Tirsdag 23. august

I dag:

- Orientering om kurset
- Reelle tall og tallinjen (avsn. P1)
  - $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ og $\mathbb{R}$
  - kompletthet: tallinjen har ingen hull
  - rasjonale tall og periodisk desimalbrøk
  - $\sqrt{2}$ er et irrasjonalt tall
  - intervaller: $[a, b],]a, b[, [a, b[,]a, b]$.
  - ulikheter: $\frac{2}{x-1} \geq 5$.

Onsdag 24. august

Avsnitt P1:

- Absoluttverdi: $|x| = \begin{cases} x, & \text{hvis } x \geq 0 \\ -x, & \text{hvis } x < 0. \end{cases}$
- Trekantulikheten:

$$|a \pm b| \leq |a| + |b|$$

Avsnitt P2

- Kartesiske koordinater

Torsdag 25. august

Avsnitt P2 og P3:

- Avstanden mellom punkter: $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$
- Grafer til sirkler
- Grafer til ligninger og ulikheter.
- Rette linjer: $y = m(x + x_1) + y_1$, $Ax + By = C$.
- skjæringspunkt mellom kurver. (Oppg. 39, s. 25)

Avsnitt P4:

- Funksjoner, definisjonsmengde, verdimengde.

Definisjon 1, s. 26

En **funksjon** f på en mengde D inn i en mengde S er en regel som til hvert element $x \in D$ gir et entydig bestemt element $f(x) \in S$.

$D = \mathcal{D}(f)$ er **definisjonsmengden** til f.

Verdimengden til f betegnes med $\mathcal{R}(f)$.

Tirsdag 30. august

Avsnitt P4:

- Jevne og odde funksjoner:

$$\text{J} : f(-x) = f(x), \quad \text{O} : f(-x) = -f(x)$$

- Forskyvning av grafer: $y - b = f(x - a)$

Avsnitt P5:

- Sammensetning av funksjoner (composition) $f \circ g(x) = f\left(g(x)\right)$
- Funksjoner med delt forskrift ("piecewise defined functions")

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{hvis } x \geq 0 \\ -x, & \text{hvis } x < 0. \end{cases}$$

Torsdag 1. september

Avsnitt P6:

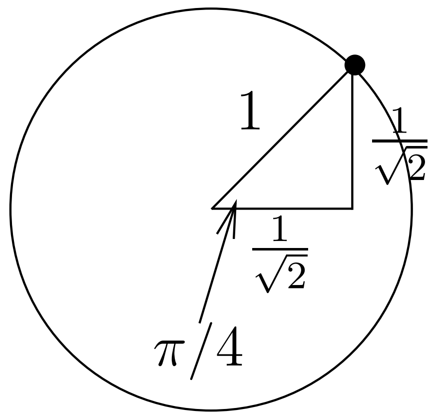
- Radianer : π radianer tilsvarer 180°
- Sinus, cosinus og tangens.
- Periodisitet: $\sin(x+2\pi) = \sin x$, $\cos(x+2\pi) = \cos x$, $\tan(x+\pi) = \tan x$.
- $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$ og andre identiteter.
- Eksakte verdier.
- Addisjonsformlene: $\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$

Avsnitt 1.1:

- Hva skal vi med grenser?
- Eksempler: hastighet; $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$.

Eksakte sinus-, cosinus- og tangensverdier

Grader	0	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$120°$	$135°$	$150°$	$180°$
Radianer	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
Sinus	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
Cosinus	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
Tangens	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	i.d.	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0



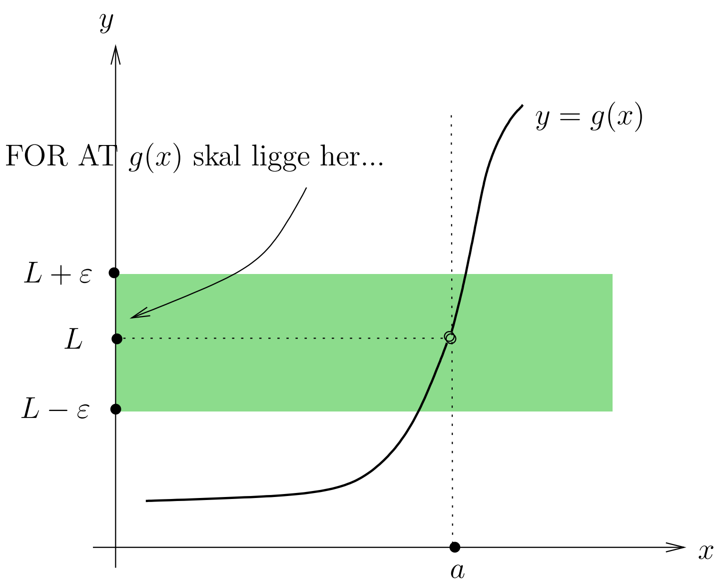
$$\sin(\pi/4) = 1/\sqrt{2}$$

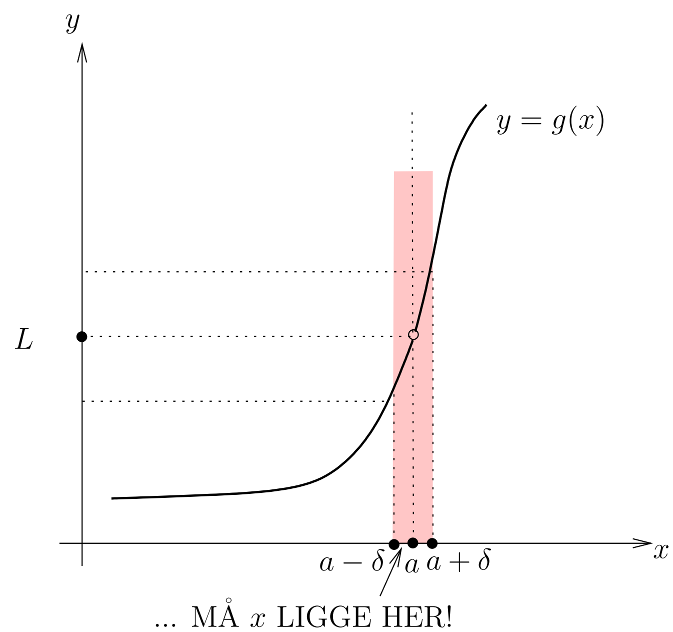
Tirsdag 6. september

Avsnitt 1.2/1.5: Grenser:

- Vi sier at $\lim_{x \to a} g(x) = L$ dersom følgende holder:
  For hver $\varepsilon > 0$ finnes en $\delta > 0$ slik at

$$0 < |x - a| < \delta \ \text{ impliserer } \ |g(x) - L| < \varepsilon.$$

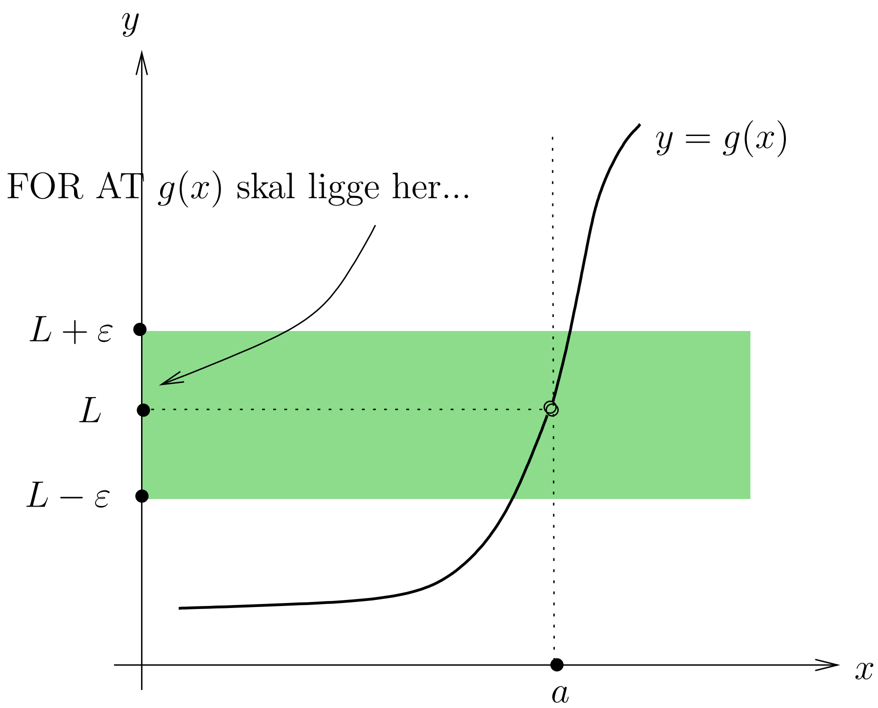


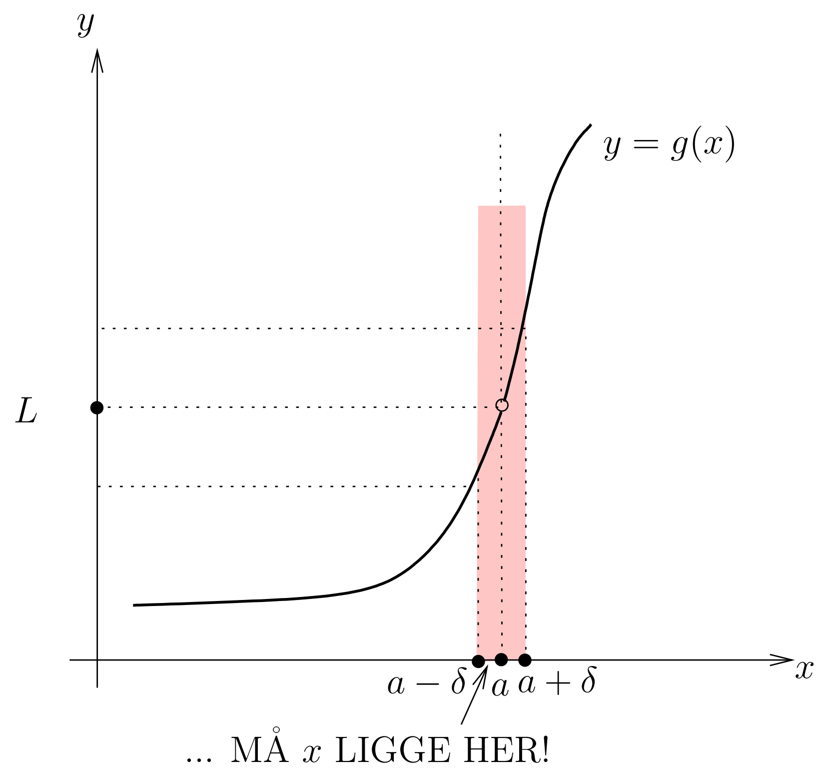


Grenser

- Vi sier at $\lim_{x\to a} g(x) = L$ dersom følgende holder: For hver $\varepsilon > 0$ finnes en $\delta > 0$ slik at

$$0 < |x - a| < \delta \;\text{ impliserer }\; |g(x) - L| < \varepsilon.$$

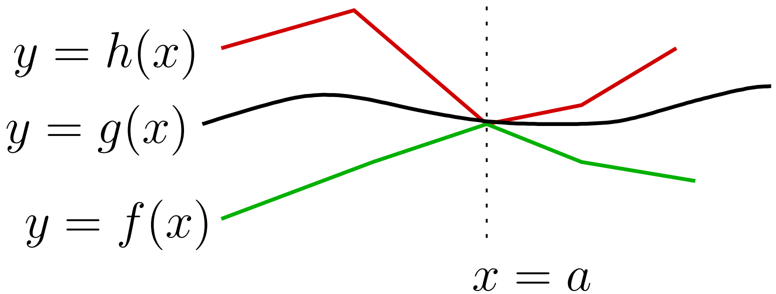




Onsdag 7. september

Avsnitt 1.2/1.5:

- Klemteoremet (“squeeze theorem”)



Avsnitt 1.3/1.5:

- Grenser i uendelig: $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$
- Uendelige grenser: $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$

Avsnitt 1.4/1.5:

- Kontinuitet: $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$

Torsdag 8. september

Avsnitt 1.4/1.5/AII:

- Kontinuitet: $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$
- Kontinuerlige utvidelser: om $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$, sett

$$F(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1}, & \text{hvis} \quad x \neq 1 \\ 2, & \text{hvis} \quad x = 1. \end{cases}$$

- Ekstremalverdisetningen.
- Skjæringssetningen/mellomverdisetningen.
- Eksistens av løsninger av ligninger.

Noen kontinuerlige funksjoner

Følgende funksjoner er kontinuerlige der de er definert:

- alle polynomfunskjoner: $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$
- alle rasjonale funksjoner: $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ (kontinuerlige der $Q(x) \neq 0$)
- alle rasjonale potensfunksjoner: $x^{m/n} = \sqrt[n]{x^m}$
- funksjonene $\sin x, \cos x, \tan x, \cot x$ der de er definert
- absoluttverdifunksjonen $|x|$.

Teorem 6, s. 81

La f og g være definert i et intervall som inneholder c, slik at de er kontinuerlige i c. Da er følgende funksjoner også kontinuerlige i c:

1. summen $f+g$ og differansen $f-g$
2. produktet fg
3. et multiplum av f: kf, for en konstant k
4. brøken f/g (så lenge $g \neq 0$)
5. n-te roten $\sqrt[n]{(f(x))} = (f(x))^{\frac{1}{n}}$ (så lenge $f(c) > 0$ hvis n er et partall).

Tirsdag 13. september

Appendiks II:

- Litt om beviset for mellomverdisetningen.
  - kompletthet

Avsnitt 2.1 og 2.2:

- Derivasjon

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

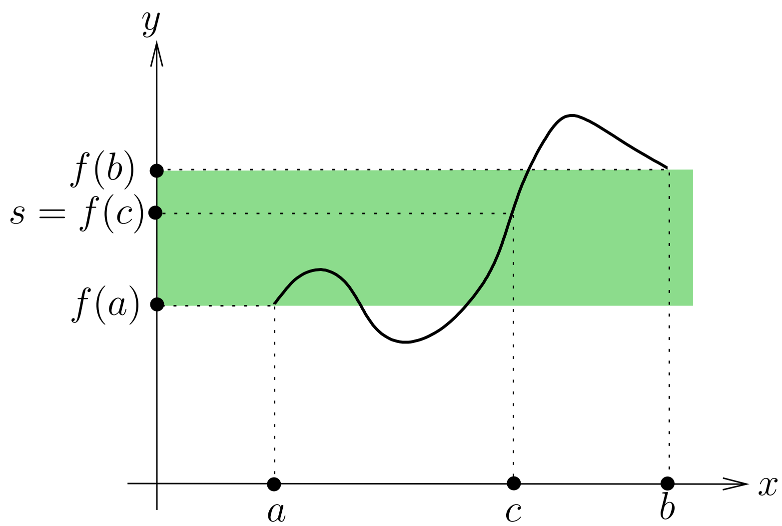
- Tangentlinjer

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Mellomverdisetningen (s. 85)

Hvis f er kontinuerlig på intervallet $[a, b]$, og hvis s er et tall mellom $f(a)$ og $f(b)$, så finnes et tall c i $[a, b]$ slik at

$$f(c) = s.$$



Dette er et *eksistensteorem*: vi får ikke vite hvordan vi skal finne c!

Torsdag 15. september

Avsnitt 2.3, 2.4

- Deriverbarhet $\Rightarrow$ kontinuitet.
- Derivasjonsregler:
  - $\frac{d}{dx}x^r = rx^{r-1}$.
  - $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$
  - $(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$.
  - Kjerneregelen: $(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$.
  - Kvotient(brøk)regelen:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$$

Induksjonsprinsippet (s. 113)

La $P(n)$ betegne et utsagn om det naturlige tallet n. Anta at

(i) $P(n_0)$ er sant;

(ii) Dersom $P(k)$ er sant for et tall k, så er også $P(k+1)$ sant.

Da er $P(n)$ sant for alle naturlige tall $n \geq n_0$.

Induksjonsprinsippet (s. 113)

Viser: $\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$ for $n \geq 1$. (i)
$\frac{d}{dx}x = 1 = 1 \cdot x^0 = 1$ (induksjonsstart)
(ii) Vi antar at $\frac{d}{dx}x^k = k \cdot x^{k-1}$ for en k.
(induksjonshypotese).
Induksjonssteg:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}x^{k+1} &= \frac{d}{dx}(x \cdot x^k) = (\frac{d}{dx}x) \cdot x^k + x \cdot \frac{d}{dx}x^k \\ &= 1 \cdot x^k + x \cdot k \cdot x^{k-1} = (k+1)x^k.\end{aligned}$$

Så vi ser at hvis formelen er riktig for $n = k$, så er den også riktig for $n = k + 1$.
Ved induksjon gjelder da formelen for alle $n \geq 1$.

Tirsdag 20. september

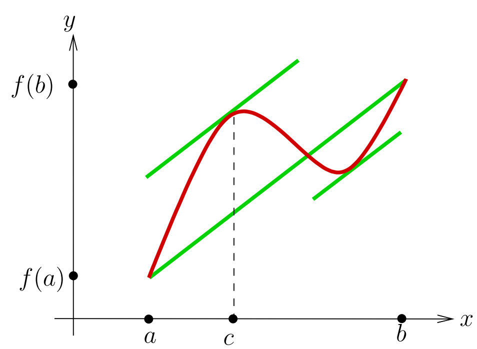
Avsn. 2.5:

- En viktig grenseverdi: $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$
- Derivasjon av trigonometriske funksjoner:

$$(\sin x)' = \cos x, \; (\cos x)' = -\sin x$$

Avsn. 2.6:

- Sekantsetningen/middelverditeoremet



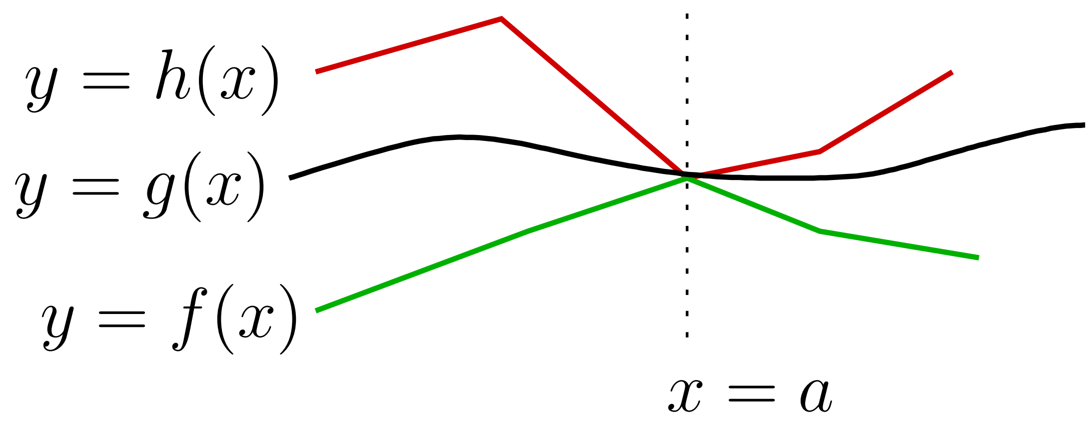
"Squeeze" teoremet (s.69)

Sett at $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ for alle x i et intervall som inneholder a (muligens bortsett fra i a). Sett at

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} h(x) = L.$$

Da er

$$\lim_{x \to a} g(x) = L.$$

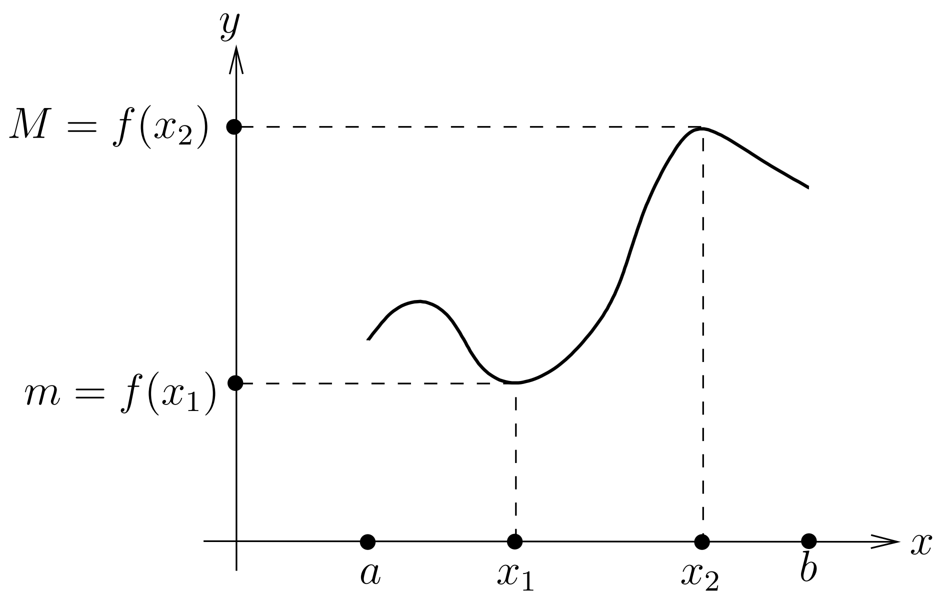


Ekstremalverdisetningen

Hvis $f(x)$ er en kontinuerlig funksjon i $[a, b]$, så finnes x_1 og x_2 i $[a, b]$ slik at for alle x i $[a, b]$ så er

$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2).$$

Altså: f har en absolutt minimalverdi $m = f(x_1)$ og en absolutt maksimalverdi $M = f(x_2)$ i $[a, b]$.

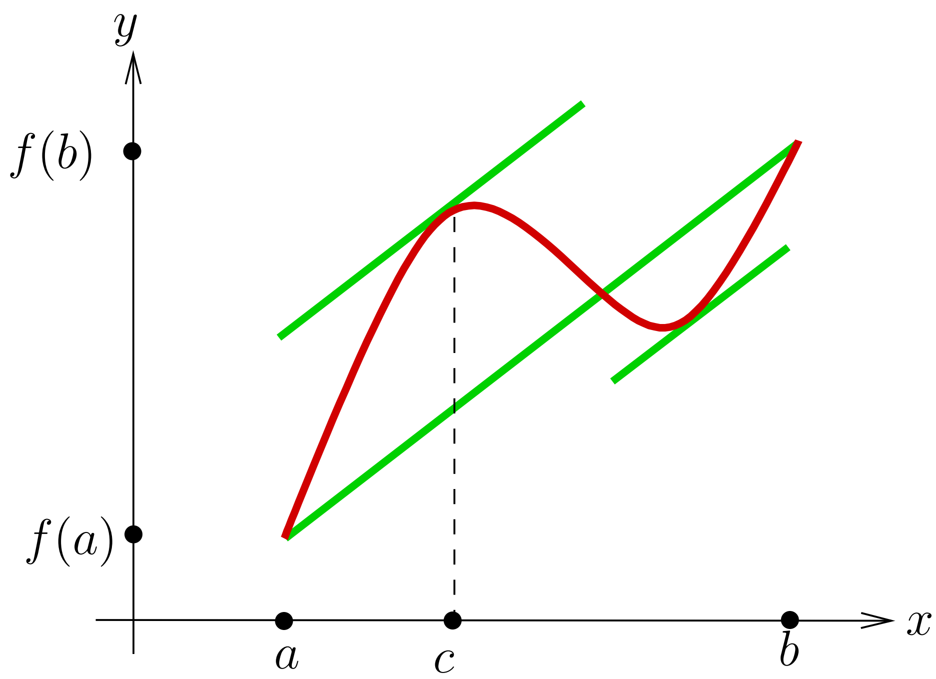


Sekantsetningen (s. 133)

Anta:

- at f er kontinuerlig i $[a, b]$
- at f er deriverbar i $]a, b[$.

Da finnes en $c \in]a, b[$ slik at $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$.

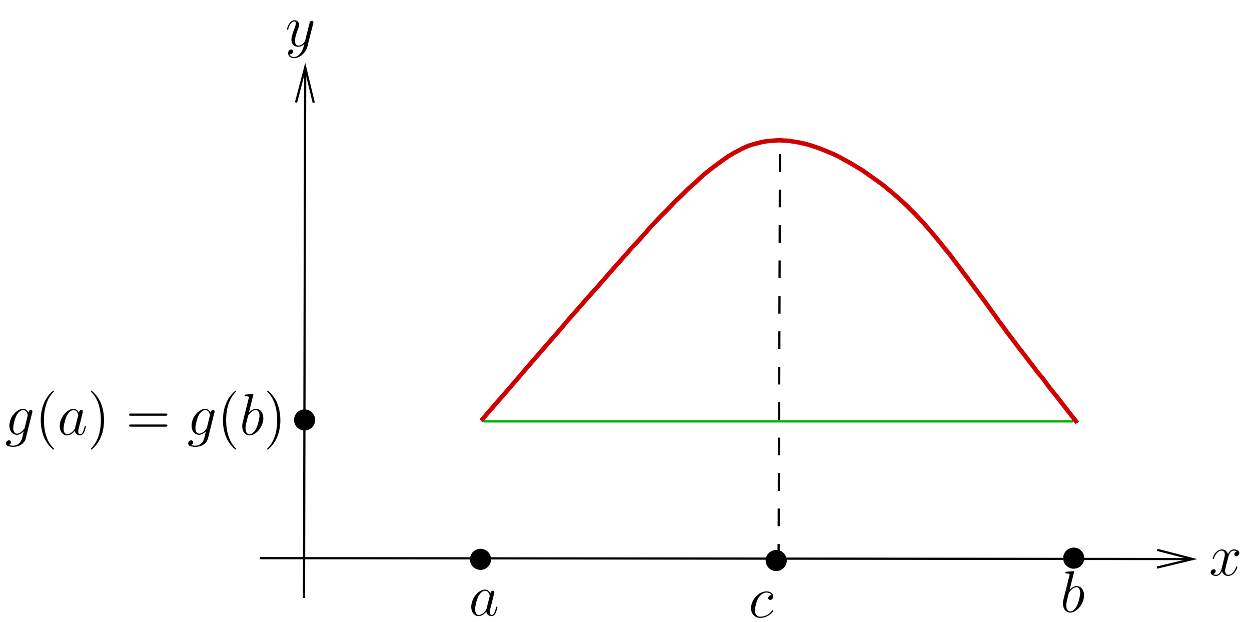


Rolles setning (s. 137)

Anta:

- at g er kontinuerlig i $[a, b]$
- at g er deriverbar i $]a, b[$.

Hvis $g(a) = g(b)$, så finnes en $c \in]a, b[$ slik at $g'(c) = 0$.



Onsdag 21. september

Avsn. 2.6:

- Sekantsetningen:
  - resten av beviset
  - voksende og avtagende funksjoner

Avsn. 2.8:

- Høyere ordens deriverte: $f'(x), f''(x)$ etc.

Om tid:
Avsn. 2.9 og 4.1:

- Implisitt derivasjon og koblede hastigheter

NB: Avsnitt 2.7 er selvstudium. Ikke heng dere for mye opp i det!

Voksende og avtagende funksjoner

La f være funksjon definert i et intervall I, og la x_1, x_2 ligge i I

- f er **voksende** i I hvis

$$x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$$

- f er **avtagende** i I hvis

$$x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$$

- f er **ikke avtagende** i I hvis

$$x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) \geq f(x_1)$$

- f er **ikke voksende** i I hvis

$$x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) \leq f(x_1)$$

Torsdag 22. september

Avsn. 2.9:

- Implisitt derivasjon

$$xy = \sin y \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y}{\cos y - x}$$

Avsn. 4.1:

- Koblede hastigheter (related rates)

Koblede hastigheter/eksempel

(Oppgave 16, s. 237 i Adams.)

En politimann står ved en vei og bruker en laserpistol til å måle hvor fort bilene kjører. Han sikter mot en bil som akkurat har passert ham, og idet siktelinken danner en vinkel på 45° med veien, ser han at avstanden mellom bilen og pistolen øker med 100 km/t.

Hvor fort kjører bilen?

Koblede hastigheter/eksempel

(Oppgave 7, s. 237 i Adams.)

Luft blir pumpet inn i en kuleformet ballong. Volumet av ballongen øker med 20 cm^3/s idet radien er 30 cm.

Hvor raskt øker radien ved dette tidspunktet?

Koblede hastigheter/eksempel

(Oppgave 14, s. 237 i Adams.)

En partikkel beveger seg mot høyre langs den delen av kurven

$$x^2y^3 = 72$$

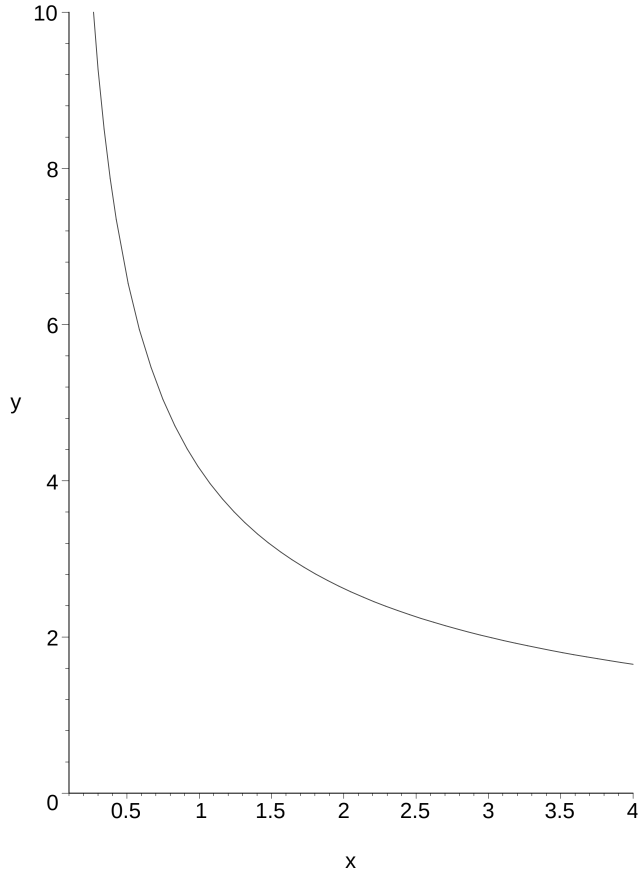
som ligger i 1. kvadrant. Når partikkelen har koordinater $(3, 2)$ er den horisontale hastiheten 2 enheter/s.

Hva er den vertikale hastigheten?

Koblede hastigheter

En del av grafen til ligningen

$$x^2y^3 = 72$$



Tirsdag 27. september

Avsn. 4.9:

- Ubestemte uttrykk

$$\left[\frac{0}{0}\right], \left[\frac{\infty}{\infty}\right], [\infty - \infty], [0 \cdot \infty]$$

- L'Hôpitals regel
- Eksempler på bruk av L'Hôpitals regel

L'Hôpitals regel (s.294)

La funksjonene f og g være deriverbare i $]a, b[$, og anta at $g'(x) \neq 0$ der. Anta også at

(i) $\lim_{x \to a+} f(x) = \lim_{x \to a+} g(x) = 0$

(ii) $\displaystyle\lim_{x \to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$ (L endelig eller $\pm\infty$.)

Da er

$$\lim_{x \to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L.$$

Den samme konklusjonen gjelder hvis vi i stedet for (i) har

(i') $\lim_{x \to a+} f(x) = \lim_{x \to a+} g(x) = \infty$

Guillaume François Antoine Marquis de L'Hôpital

(1661-1704)

- Oppdaget ikke sin egen regel, men publiserte den.
- Utga den første læreboken i integral- og differensialregning: *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes* (1696)

http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/

Den generaliserte sekantsetningen (s. 139)

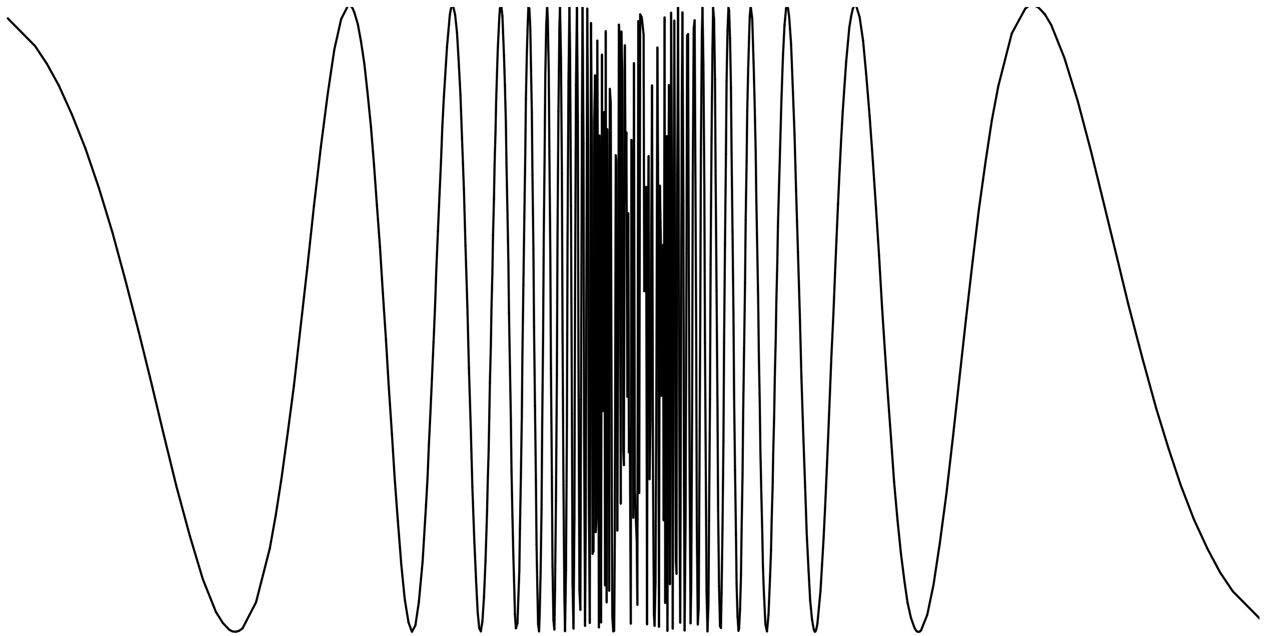
Anta:

- f og g kontinuerlige i $[a, b]$
- f og g deriverbare i $]a, b[$ og $g'(x) \neq 0$ der.

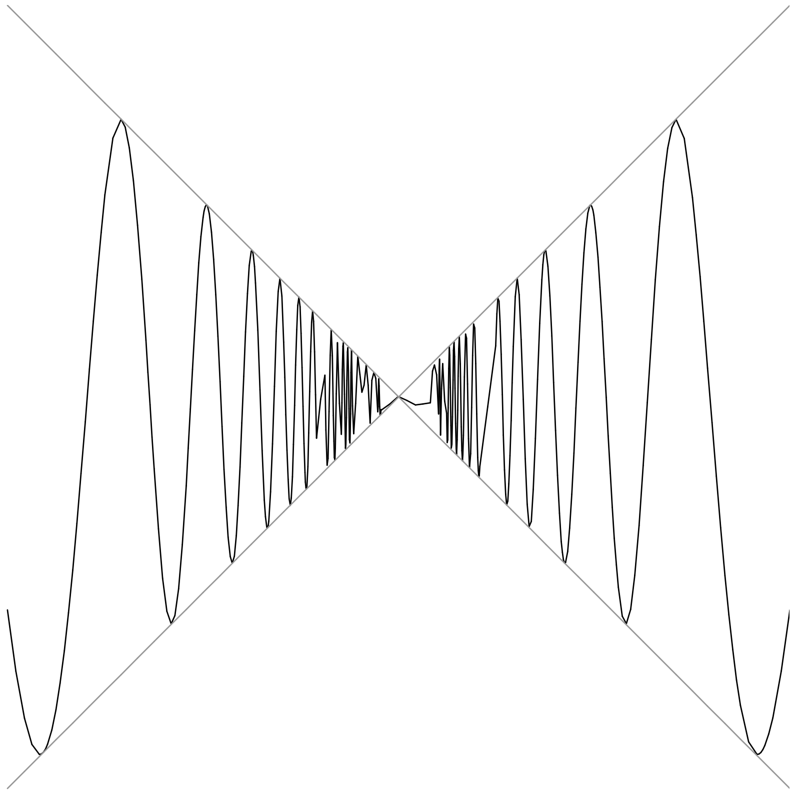
Da finnes en $c \in]a, b[$ slik at

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

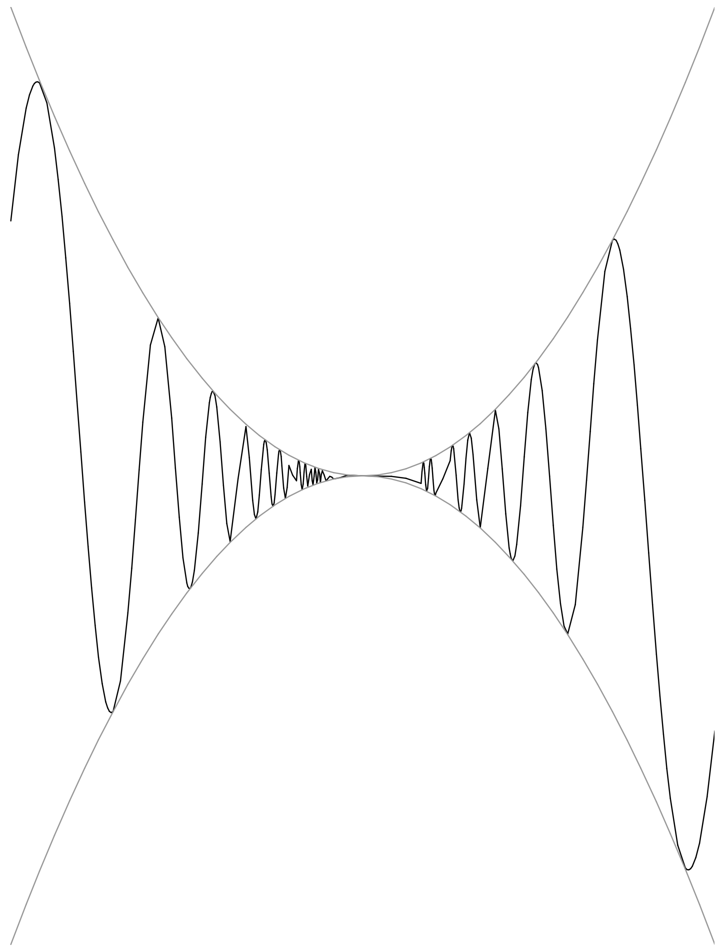
$$y = \sin\frac{1}{x}$$



$$y = x \cdot \sin \frac{1}{x}$$



$$y = x^2 \cdot \sin\frac{1}{x}$$



Onsdag 5. oktober

Avsn. 5.1

- Summasjonsnotasjon:
  $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \sum_{i=1}^{n} i.$

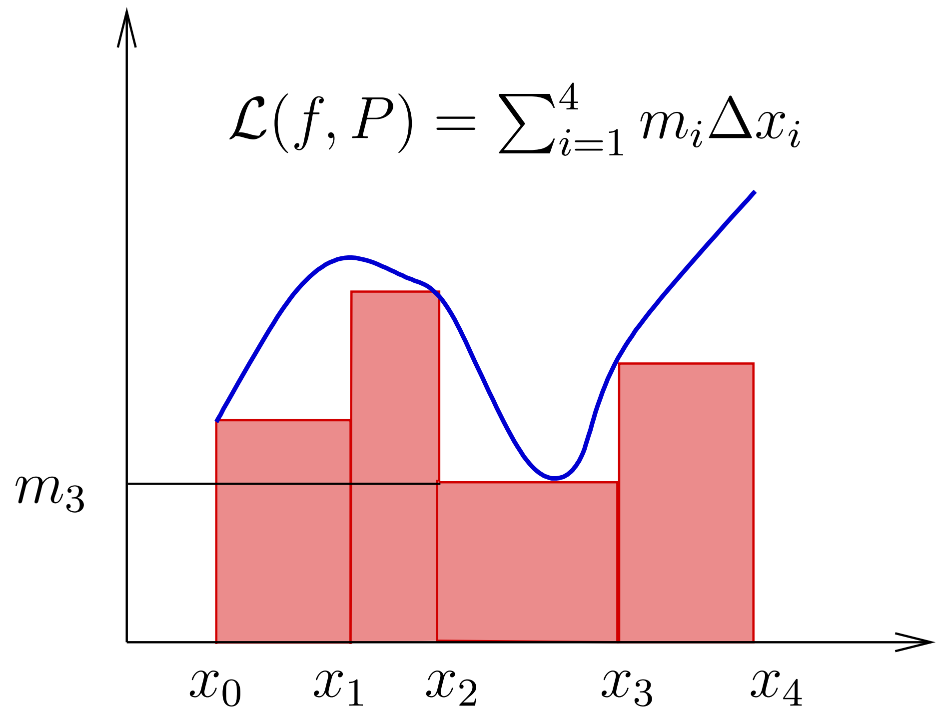
Avsn. 5.2

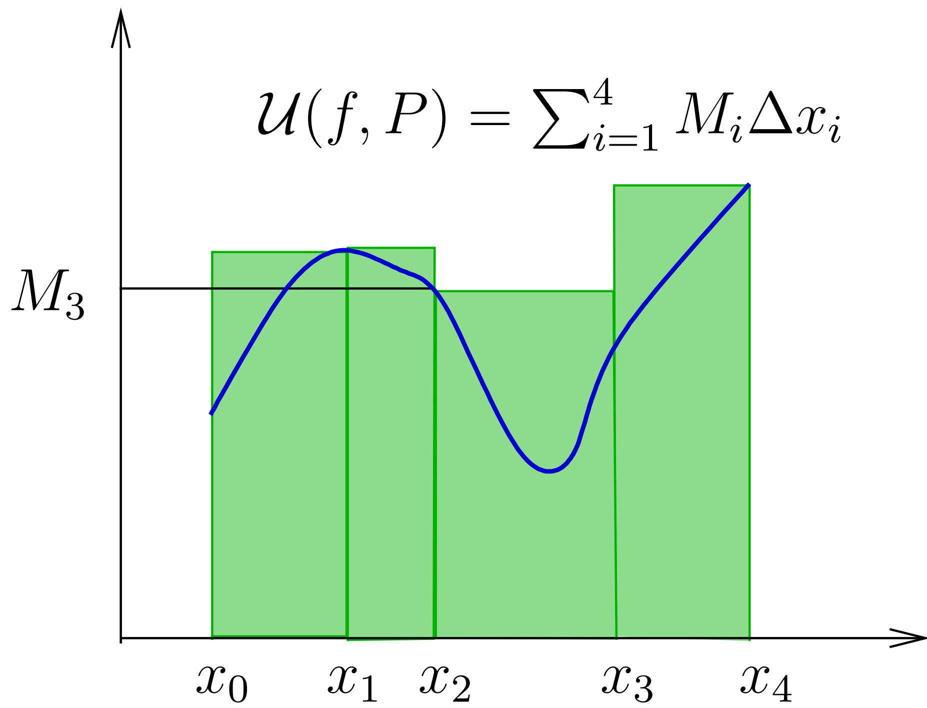
- Areal: $A \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i.$

Avsn. 5.3/ App. III

- Partisjoner: $P = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n\}$
- Riemann-summer: $\mathcal{U}(f, P), \mathcal{L}(f, P)$

Riemann-summer





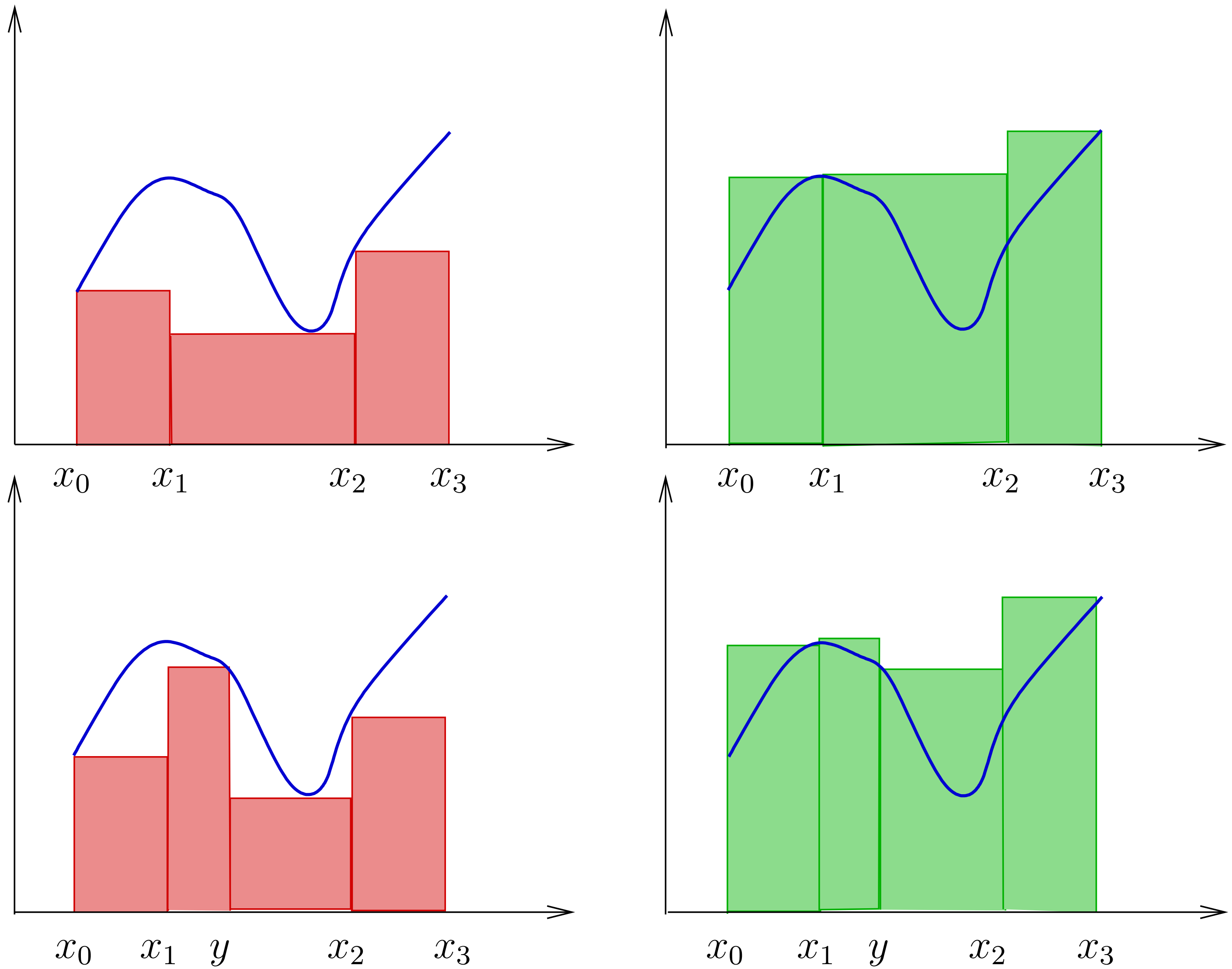
$$P = \{x_0, x_1, x_2, x_3, x_4\}$$

$$m_i = \inf\{f(x) \colon x \in [x_{i-1}, x_i]\}$$

$$M_i = \sup\{f(x) \colon x \in [x_{i-1}, x_i]\}$$

Forfininger

$$P = \{x_0, x_1, x_2, x_3\}$$



$$P^* = \{x_0, x_1, y, x_2, x_3\}$$

Torsdag 6. oktober

Avsn. 5.3/ App. III

- Riemann-summer: $\mathcal{U}(f, P), \mathcal{L}(f, P)$
- Riemann-integralet

$$\int_a^b f(x)dx = I^* = I_*$$

Integrerbarhet

Teorem 3, s. A-20

La f være begrenset i $[a, b]$

Da er f integrerbar i $[a, b]$ *hvis og bare hvis* det for hver $\varepsilon > 0$ finnes en partisjon P av $[a, b]$ slik at

$$\mathcal{U}(f, P) - \mathcal{L}(f, P) < \varepsilon.$$

Riemannintegralet: oppsummering

- Innførte partisjon $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$
- Innførte $\mathcal{L}(f, P) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i, \mathcal{U}(f, P) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$
- Fant: $\mathcal{L}(f, P') \leq \mathcal{U}(f, P)$ uansett P' og P (Teorem 2, s. A-19)
- Definerte: $I^* = \inf\{\mathcal{U}(f, P) : P \text{ partisjon}\}$
- Definerte: $I_* = \sup\{\mathcal{L}(f, P) : P \text{ partisjon}\}$
- f integrerbar hvis $I_* = I^*$; $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = I_* = I^*$
- Spesielt: hver kontinuerlig f er integrerbar

Tirsdag 11. oktober

Avsn. 5.3/App. III:

- Kontinuerlige funksjoner er integrerbare

Avsn. 5.4:

- Egenskaper ved det bestemte integralet
- En sekantsetning for integraler

Avsn. 5.5:

- **Analysens fundamentalsetning**
- Antiderivasjon (se også 2.10)

Egenskaper ved bestemt integral

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$$

$$\int_a^b \left(Af(x) + Bg(x)\right)\,dx = A\int_a^b f(x)\,dx + B\int_a^b g(x)\,dx$$

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$$

Egenskaper ved bestemt integral

$a \leq b$, $f(x) \leq g(x)$:

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$$

Trekantulikhet ($a \leq b$):

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$$

Egenskaper ved bestemt integral

f odde funksjon ($f(-x) = -f(x)$):

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$$

f jevn funksjon ($f(-x) = f(x)$):

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

I beviset for fundamentalsetningen

- Egenskap ved bestemt integral: $a \leq b \leq c$

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx} + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$$

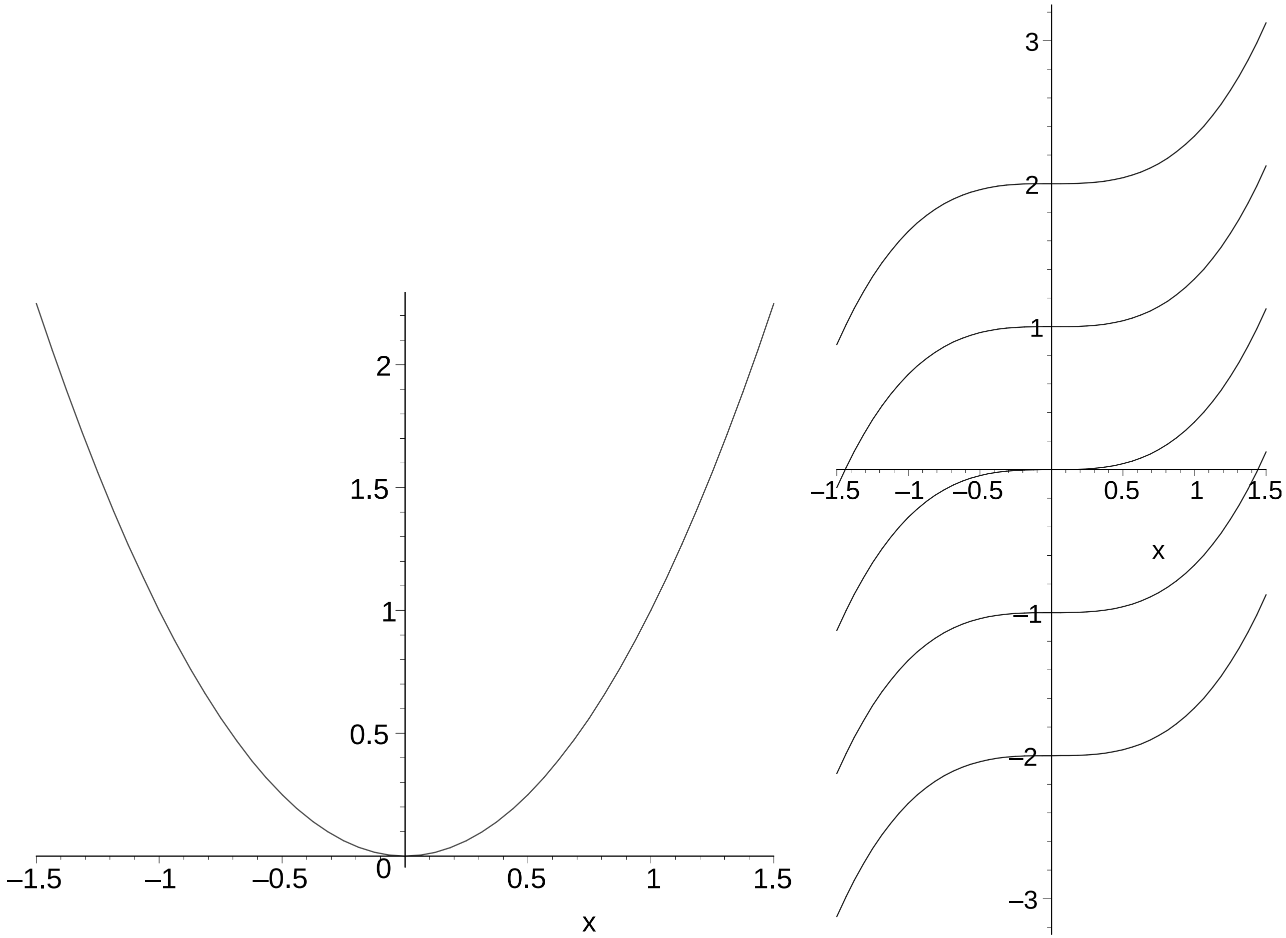
$$\int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx - \boxed{\int_a^b f(x)\,dx}$$

- det finnes c mellom a og b slik at

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)f(c).$$

Antiderivasjon

Grafen til $y = x^2$ og grafene til noen antideriverte.



Torsdag 13. oktober

Avsn. 5.5:

- Litt mer om antiderivasjon og integrasjon

Avsn. 5.6:

- Antiderivasjon v. h. a. substitusjon

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = \int f(u)\,du, \quad u = g(x)$$

Analysens fundamentalsetning

La f være kontinuerlig i et intervall I, $a \in I$.

Del 1 Definer funksjonen F i I ved

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt.$$

Da er F deriverbar i I, og $F'(x) = f(x)$.

Med andre ord: F er det vi kaller en antiderivert av f:

$$F'(x) = \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x).$$

Analysens fundamentalsetning

La f være kontinuerlig i et intervall I, $a \in I$.

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt.$$

Del 2 La G være en hvilken som helst antiderivert av $f(x)$ i I:

$$G'(x) = F'(x) = f(x).$$

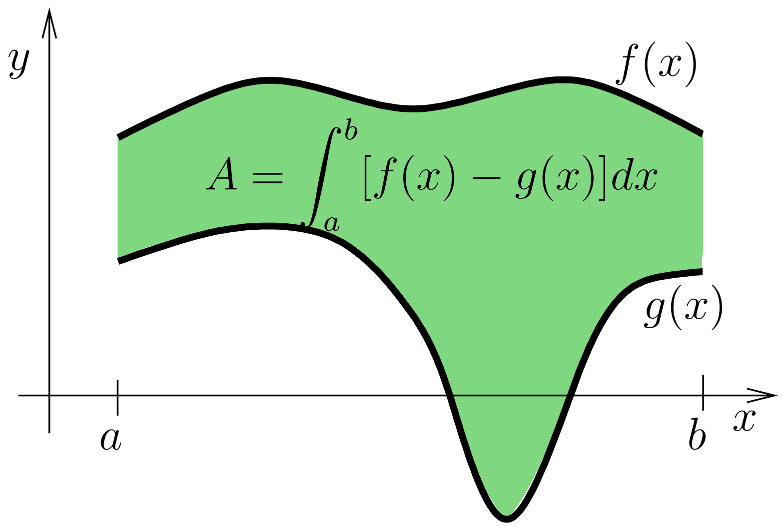
Da har vi, for enhver b i I:

$$\int_a^b f(x)\,dx = G(b) - G(a).$$

Tirsdag 18. oktober

Avsn. 5.7:

- Areal av områder mellom grafer

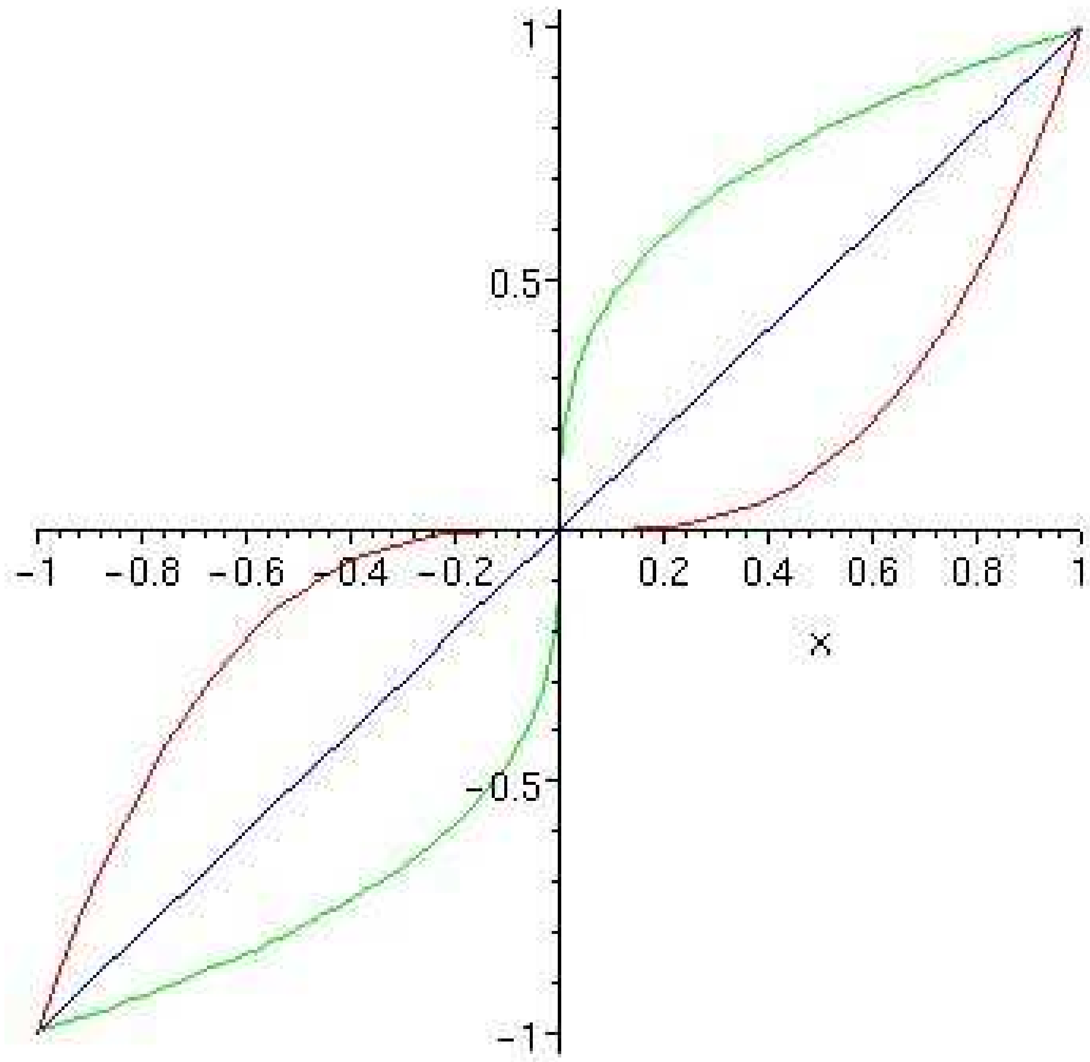


Avsn. 3.1:

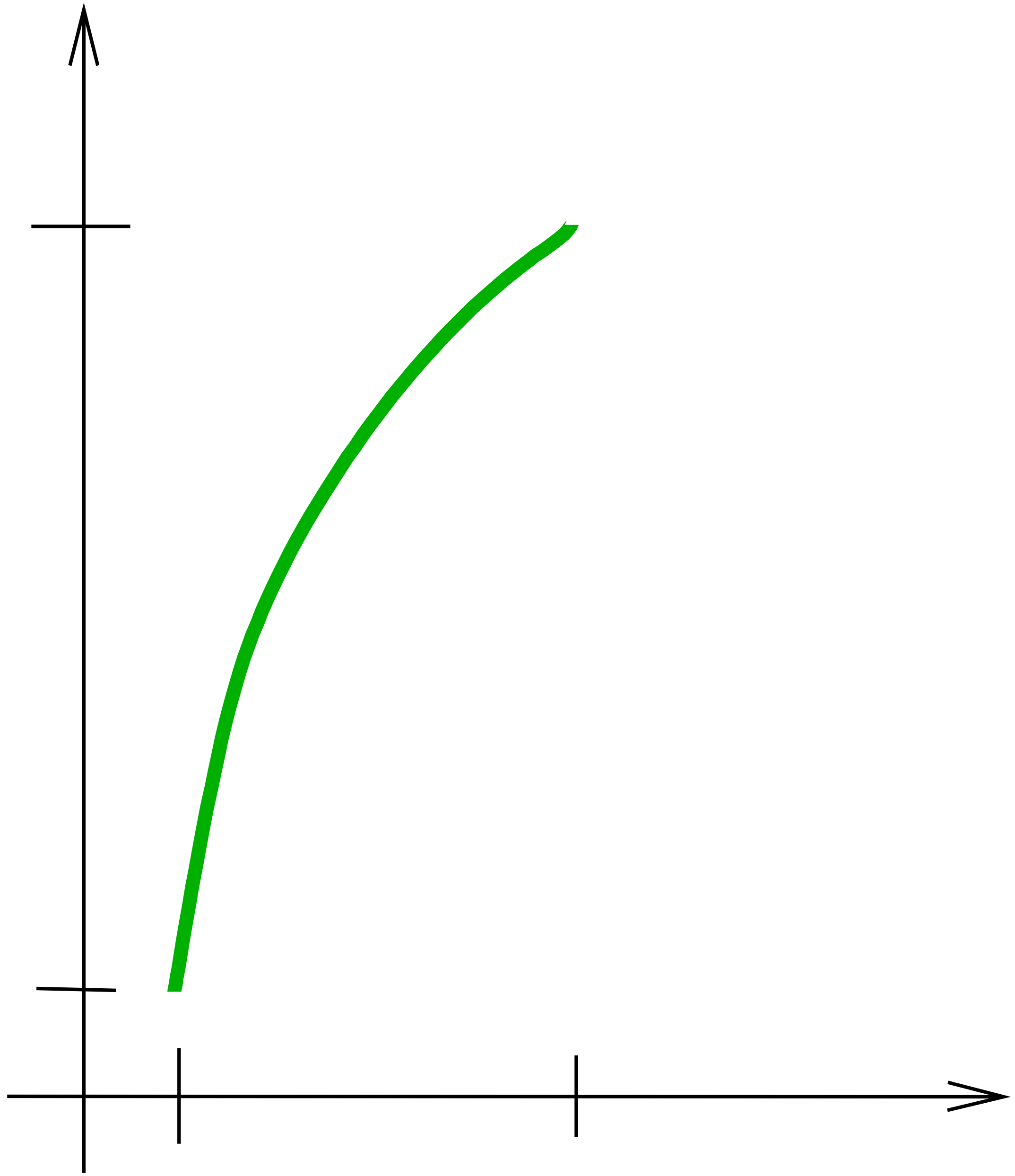
- Omvendte funksjoner/inversfunksjoner

$$y = f^{-1}(x) \iff x = f(y)$$

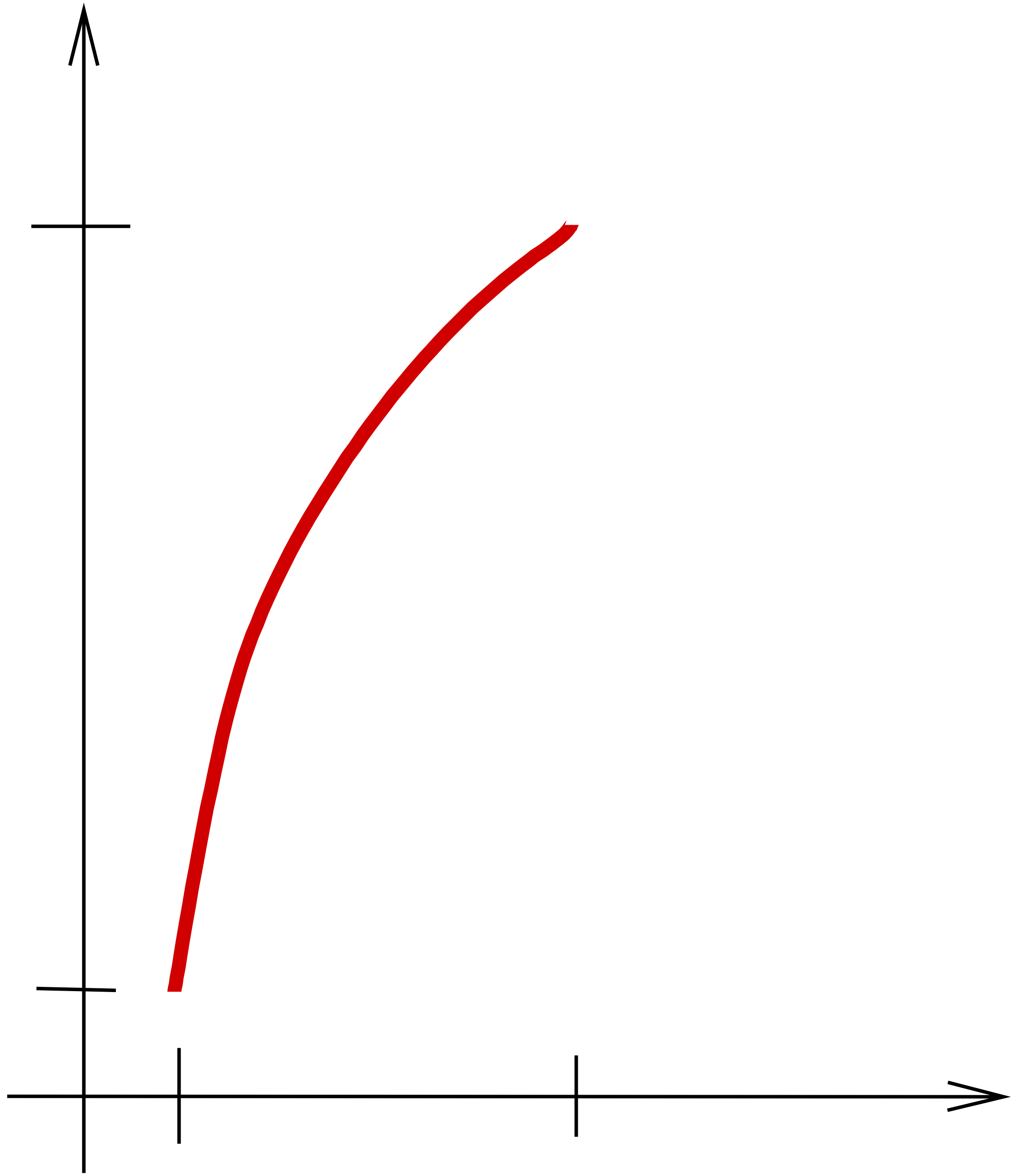
Omvendte funksjoner



Omvendte funksjoner



Omvendte funksjoner



En test for en-entydighet (I)

Teorem

Sett at en funksjon f er definert i et intervall I (der vi tillater $I = \mathbb{R}$).

Hvis f enten er voksende eller avtagende i I, så er f en-entydig i I, og har en invers f^{-1}.

En test for en-entydighet (II)

Teorem

Sett at en funksjon f er deriverbar i et åpent intervall $]a,b[$ (der vi tillater $]a,b[=]-\infty,\infty[$). Sett at $f'(x)>0$ eller $f'(x)<0$ i $]a,b[$. Da er f en-entydig i $]a,b[$, og har en invers f^{-1} der.

Hvis $f'(x)>0$ eller $f'(x)<0$ i $]a,b[$ og f i tillegg er kontinuerlig i $[a,b]$ (eller $[a,b[$ eller $]a,b]$), så er f en-entydig i $[a,b]$ (eller $[a,b[$ eller $]a,b]$).

En test for en-entydighet

Eksempel

Funksjonen $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ er en-entydig i $\mathbb{R}$ fordi

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1 \cdot \sqrt{x^2+1} - x \cdot \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{(\sqrt{x^2+1})^2} \\
&= \frac{x^2+1-x^2}{(x^2+1)^{3/2}} \\
&= \frac{1}{(x^2+1)^{3/2}} > 0, \quad x \in \mathbb{R}.
\end{aligned}
$$

Onsdag 19. oktober

Avsn. 3.1 (forts.):

- Hvordan finne omvendte funksjoner.
- Derivasjon av omvendte funksjoner.

Avsn. 3.2 og 3.3:

- Logaritme- og eksponentialfunksjoner

$$\log_a x, \quad a^x$$

- De naturlige logaritme- og eksponentialfunksjoner

$$\ln x = \int_0^x \frac{1}{t}\, dt, x > 0, \;\; \exp(x) = \ln^{-1}(x)$$

Eksponenter

La $a > 0$, $b > 0$.

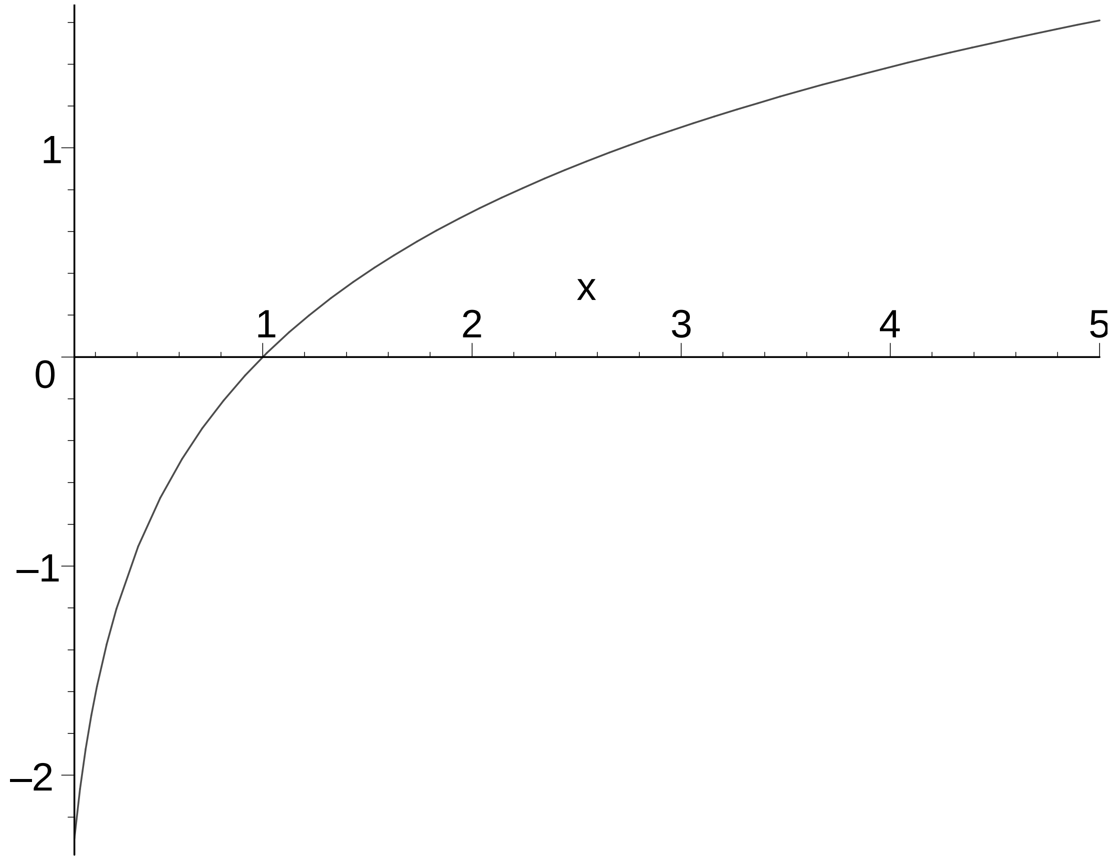
- $a^0 = 1$
- $a^{x+y} = a^x a^y$
- $a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$
- $a^{x-y} = \dfrac{a^x}{a^y}$
- $(a^x)^y = a^{xy}$
- $(ab)^x = a^x b^x$

Logaritmer

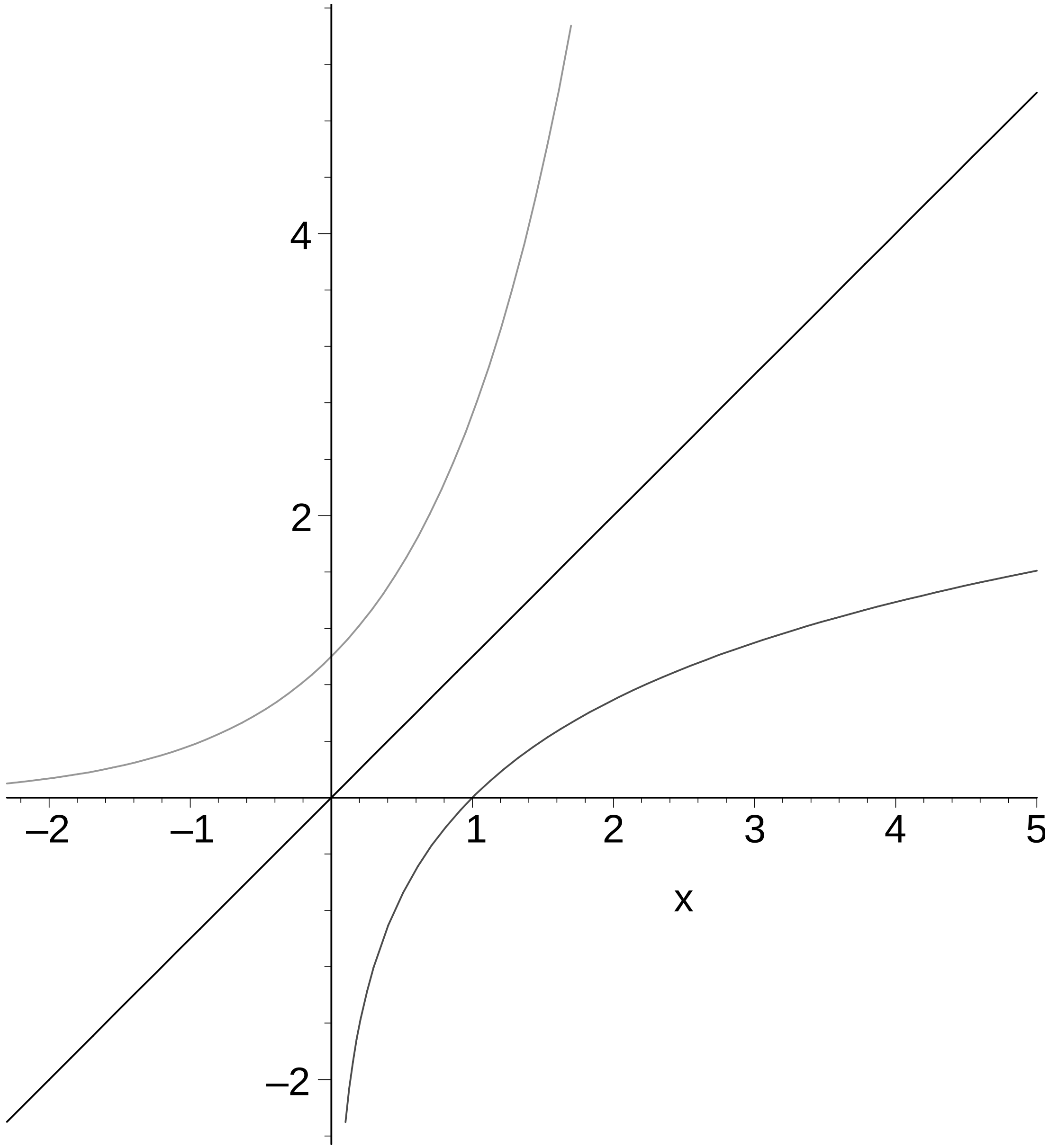
La $a > 0$, $b > 0$, $x > 0$, $y > 0$, $a \neq 1$, $b \neq 1$.

- $\log_a(1) = 0$
- $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$
- $\log_a\left(\frac{1}{x}\right) = -\log_a x$
- $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) a^{x-y} = \log_a x - \log_a y$
- $\log_a(x^y) = y \log_a x$
- $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$

Den naturlige logaritmefunksjonen



$\exp(x)$ **og** $\ln x$



Torsdag 20. oktober

Avsn. 3.2 og 3.3 (forts.):

- Logaritme- og eksponentialfunksjoner

$$\log_a x, \quad a^x$$

- De naturlige logaritme- og eksponentialfunksjoner

$$\ln x = \int_0^x \frac{1}{t}\, dt, x > 0, \;\; \exp(x) = \ln^{-1}(x)$$

Tirsdag 25. oktober

Avsn. 3.4

- "Veksten" til e^x og $\ln x$
- Vekst og nedbrytning: matematiske modeller

$$\frac{dy}{dt} = ky \Longrightarrow y(t) = y(0)e^{kt}$$

Avsn. 3.5

- Omvendte trigonometriske funksjoner

$$\arcsin x = \sin^{-1} x$$

$$\arccos x = \cos^{-1} x$$

Eksponentiell vekstmodell

Eksempel (Ex. 1 s.198 i Adams)

Antall celler i en cellekultur har en vekstrate som er proporsjonal med antall celler i kulturen.

Sett at det opprinnelig er 500 celler i kulturen, og at det 24 timer senere er 800 celler. Hvor mange celler er det etter ytterligere 12 timer?

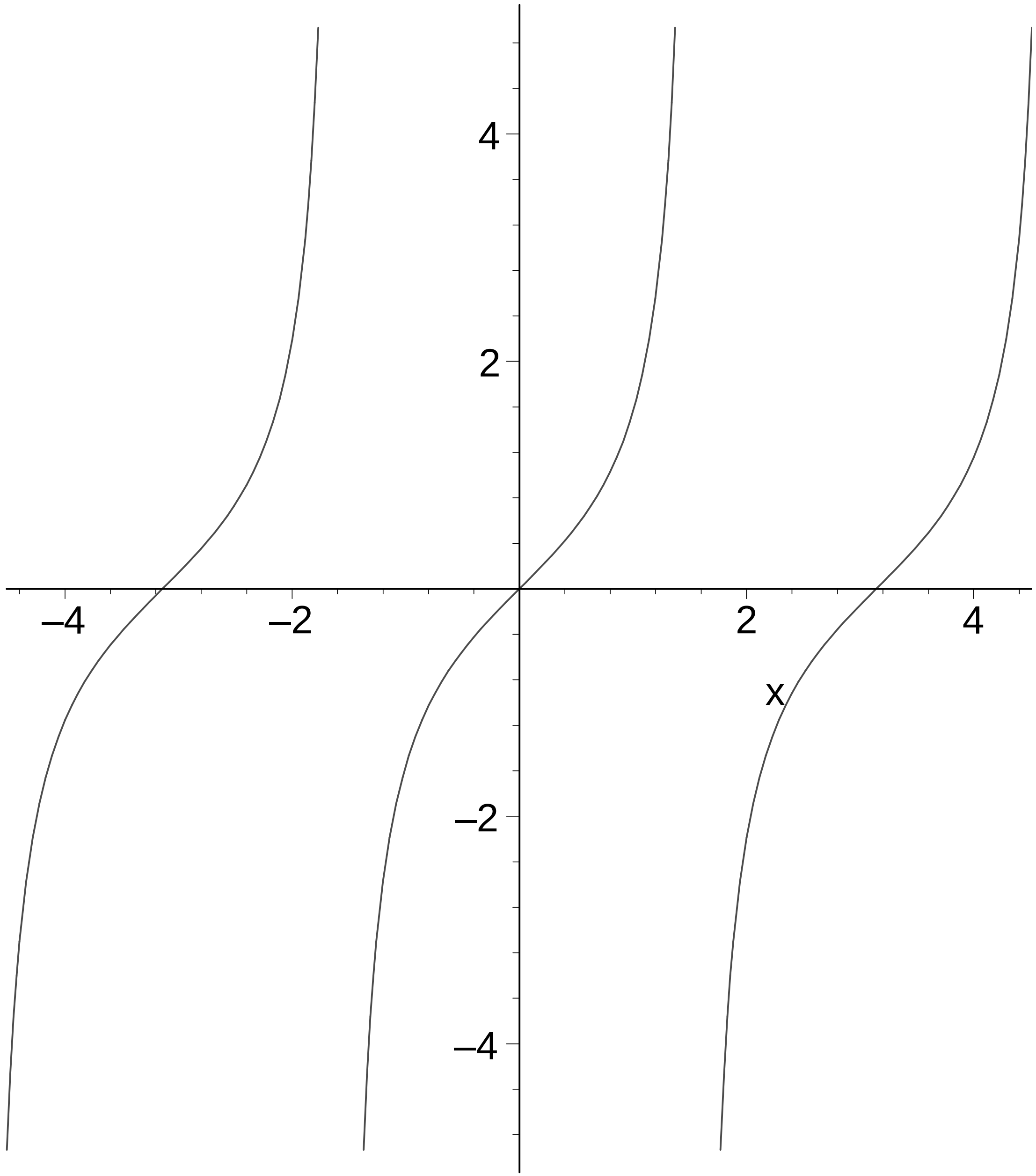
Newtons avkjølingslov

Eksempel (Ex. 3, s.200 i Adams)

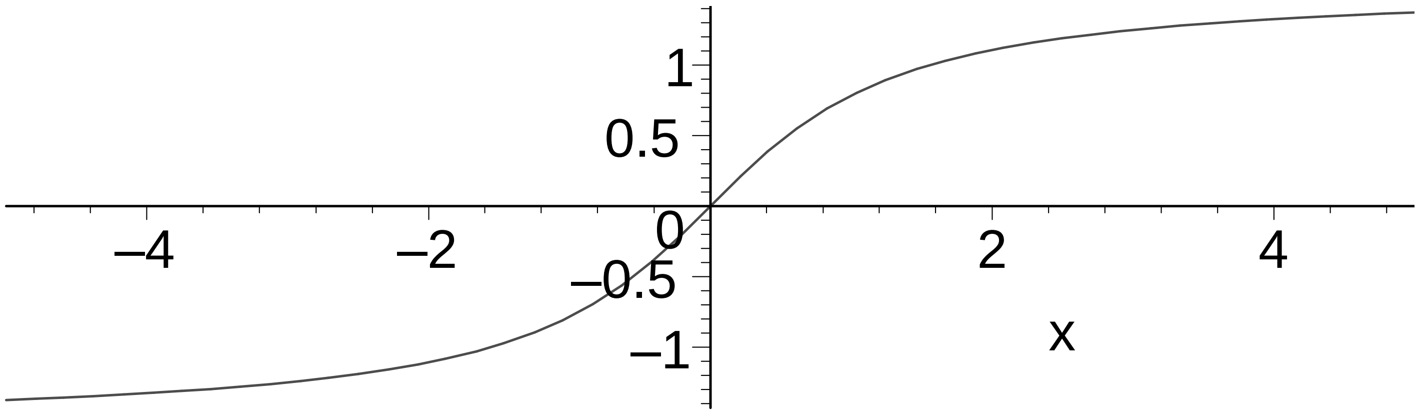
Et varmt objekt som plasseres i kjøligere omgivelser vil avkjøles med en hastighet som er proporsjonal med differansen mellom objektets temperatur og omgivelsenes temperatur.

Sett at en kaffekopp som holder en temperatur på 80°C settes i et rom med temperatur 20°C, og at kaffen avkjøles til 50°C i løpet av fem minutter. Hvor mye lenger tid tar det før kaffen avkjøles til 40°C?

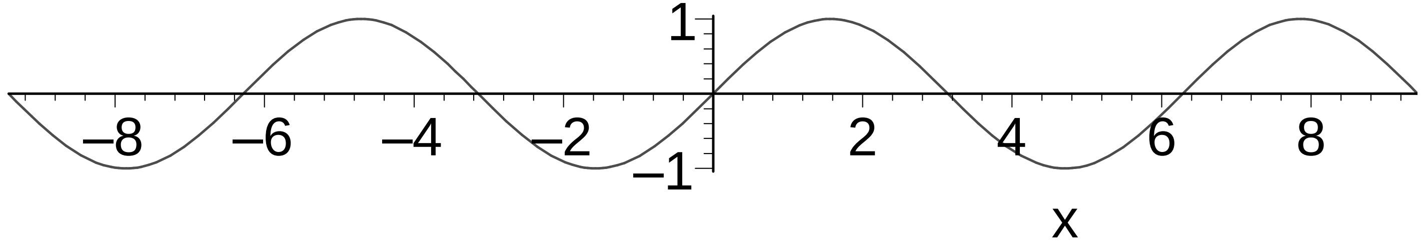
$y = \tan x$



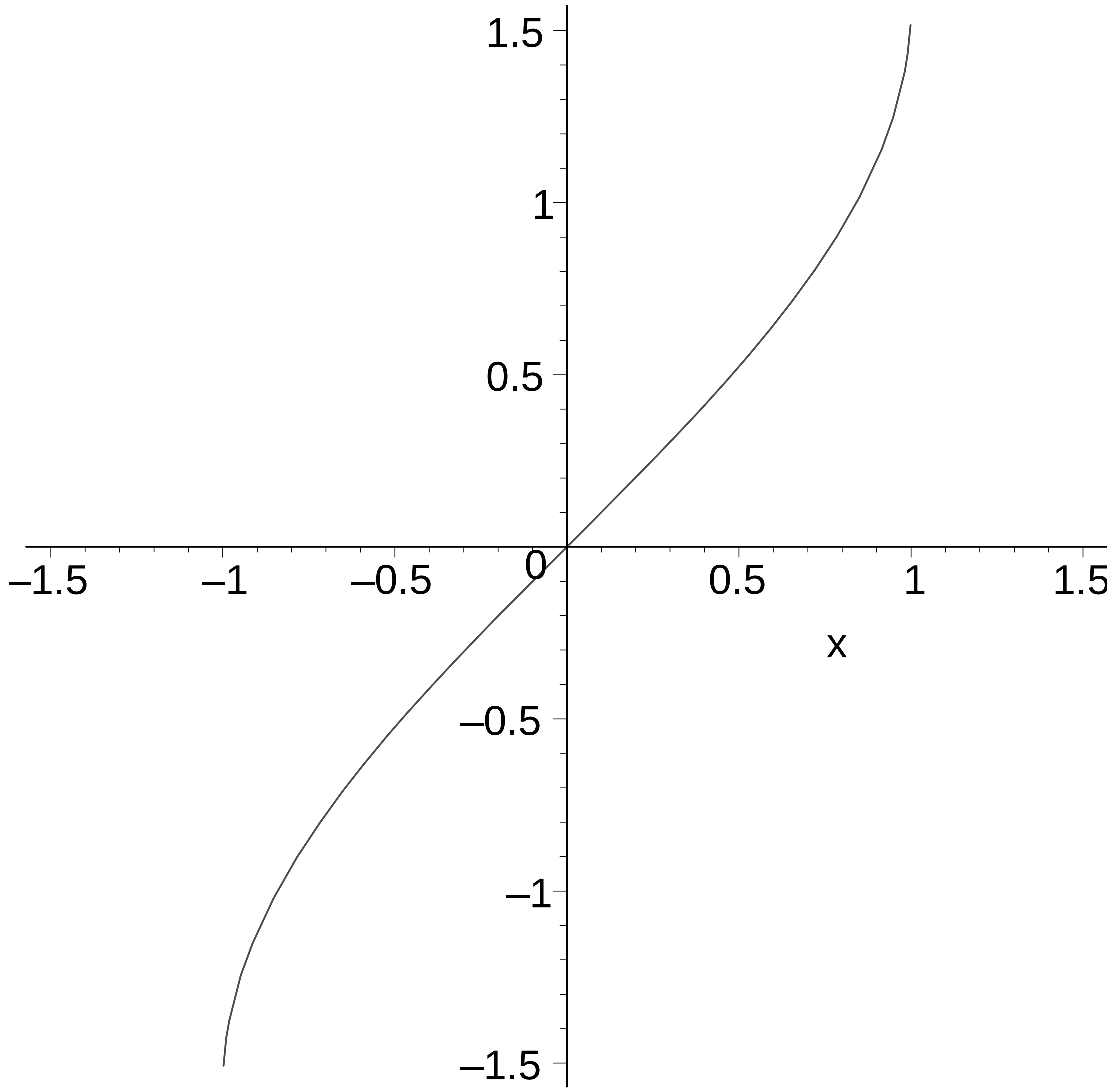
$$y = \tan^{-1} x$$



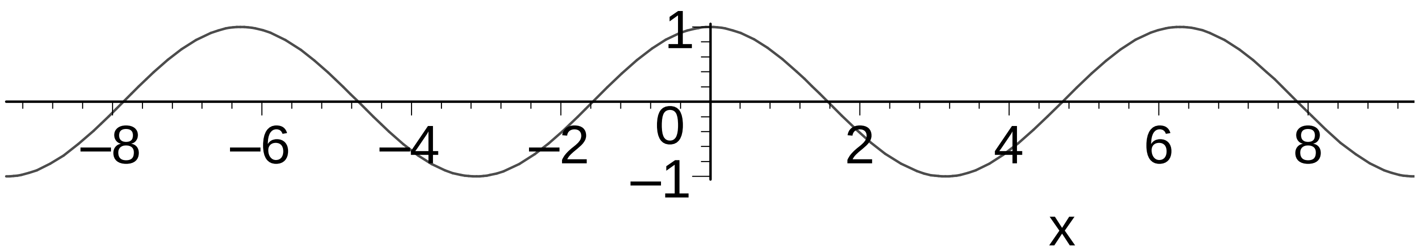
$$y = \sin x$$



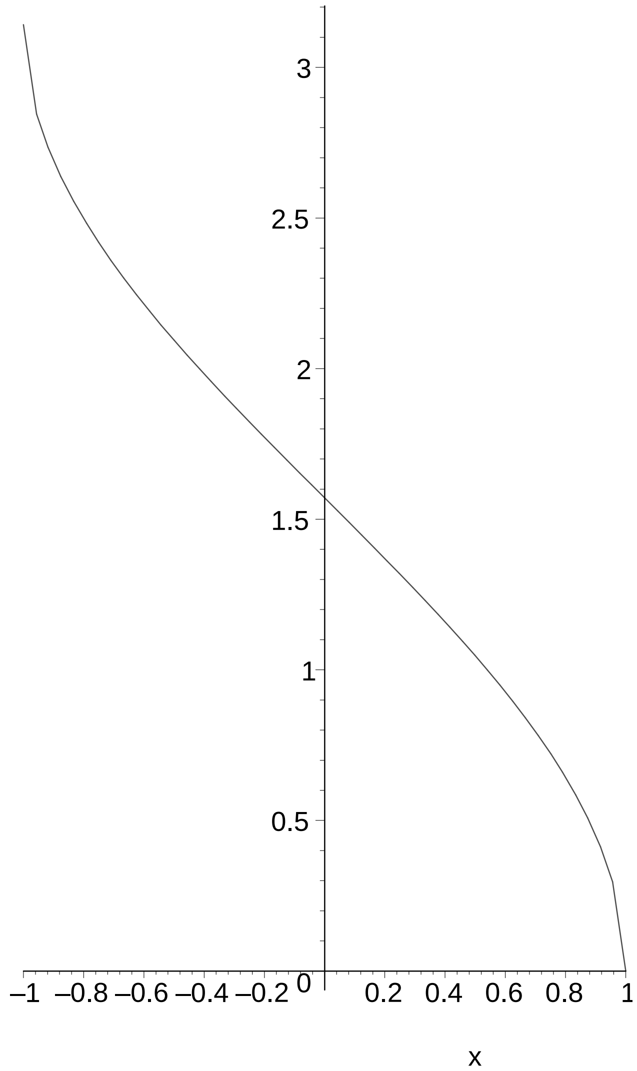
$$y = \sin^{-1} x$$



$y = \cos x$



$$y = \cos^{-1} x$$



Torsdag 27. oktober

Avsn. 3.5

- Omvendte trigonometriske funksjoner

$$\sin^{-1} x,\ \cos^{-1} x,\ \tan^{-1} x$$

Avsn. 3.6

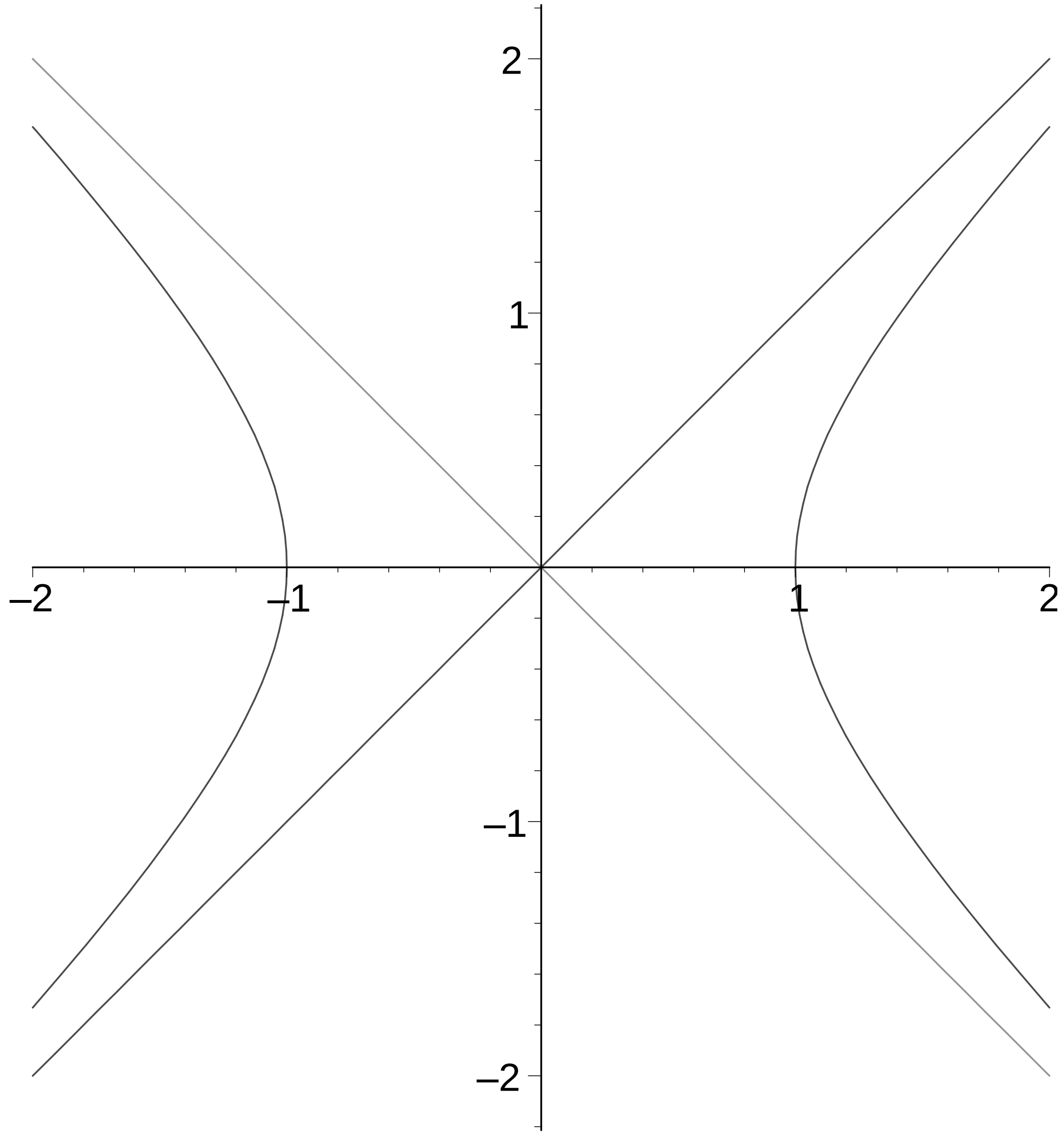
- Litt om hyperbolske funksjoner:

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2},\ \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

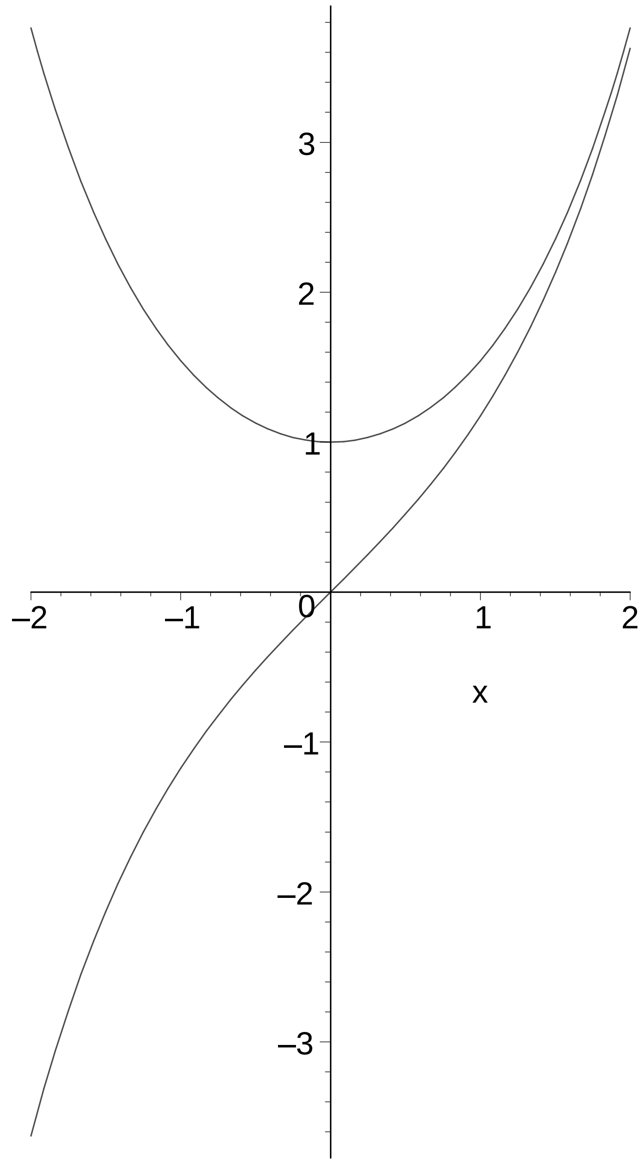
Avsn. 4.2-4.5

- Ekstremalverdier. Drøfting av funksjoner.

Hyperbelen $x^2 - y^2 = 1$



$\cosh x$, $\sinh x$



Tirsdag 1. november

Avsnittene 4.2-4.4

- Ekstremalverdier
- Vendepunkt
- Asymptoter
- Drøfting og skissering av grafer

Førstederiverttesten (I)

Anta at f er kontinuerlig i x_0, og at x_0 ikke er et endepunkt i $\mathcal{D}(f)$.

a) Hvis det finnes et åpent intervall $]a,b[$ rundt x_0 slik at $f'(x) > 0$ i $]a,x_0[$ og $f'(x) < 0$ i $]x_0,b[$, så har f en lokal maksimumsverdi i x_0.

b) Hvis det finnes et åpent intervall $]a,b[$ rundt x_0 slik at $f'(x) < 0$ i $]a,x_0[$ og $f'(x) > 0$ i $]x_0,b[$, så har f en lokal minimumsverdi i x_0.

NB: krever ikke at $f'(x_0)$ finnes: x_0 kan godt være et singulært punkt!

Førstederiverttesten (II)

Sett at a er et venstre endepunkt i $\mathcal{D}(f)$, og at f høyrekontinuerlig i a.

c) Hvis $f'(x) > 0$ i et intervall $]a, c[$, så har f en lokal minimumsverdi i a.

d) Hvis $f'(x) < 0$ i et intervall $]a, c[$, så har f en lokal maksimumsverdi i a.

NB: Samme gjelder høyre endepunkt b hvis f er venstrekontinuerlig i b.

Annenderiverttesten (s.250)

Anta at f er to ganger deriverbar i et intervall I, altså at $f'(x)$ og $f''(x)$ finnes i I.

(a) Hvis $f'(x_0) = 0$ og $f''(x_0) < 0$, så har f en lokal maksimumsverdi i x_0

(b) Hvis $f'(x_0) = 0$ og $f''(x_0) > 0$, så har f en lokal minimumsverdi i x_0

NB: Hvis $f'(x_0) = 0$ og $f''(x_0) = 0$ kan vi ikke trekke noen konklusjon!

Skissering av grafer

1. Finn $f'(x)$ og $f''(x)$
2. Betrakt $f(x)$ og finn
   (a) alle asymptoter (vertikale, horisontale og skrå)
   (b) symmetriegenskaper (er f odde eller jevn?)
   (c) opplagte skjæringspunkt med x- og y-aksene
3. Betrakt $f'(x)$ og finn
   (a) alle kritiske punkt (dvs. punkt hvor $f'(x) = 0$)
   (b) alle punkt der $f'(x)$ ikker er definert (dvs. singulære punkt, endepunkt, vertikale asymptoter)
   (c) hvor $f'(x) > 0$ og $f'(x) < 0$. (Informasjonen forteller oss hvor f er voksende, hvor den er avtagende, og hvor f har lokale ekstremalverdier.) Bruk fortegnsskjema.
4. Betrakt $f''(x)$ og finn
   (a) alle punkt hvor $f''(x) = 0$
   (b) punkt hvor $f''(x)$ ikke er definert (Husk spesielt at $f''(x)$ ikke kan være definert der $f'(x)$ ikke er definert).
   (c) hvor $f''(x) > 0$ og $f''(x) < 0$. Bruk fortengsskjema.
   (d) alle vendepunkt.

Onsdag 2. november

Avsnittene 4.4-4.5

- Drøfting og skissering av grafer
- Ekstremalverdiproblemer

Avsnittene 6.1-6.2

- Delvis integrasjon

$$\text{“}\int u'v = uv - \int uv'\text{“}$$

- Inverse substitusjoner

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} \overset{x=a\sin\theta}{=} \int 1\, d\theta = \theta + C = \arcsin\frac{x}{a} + C$$

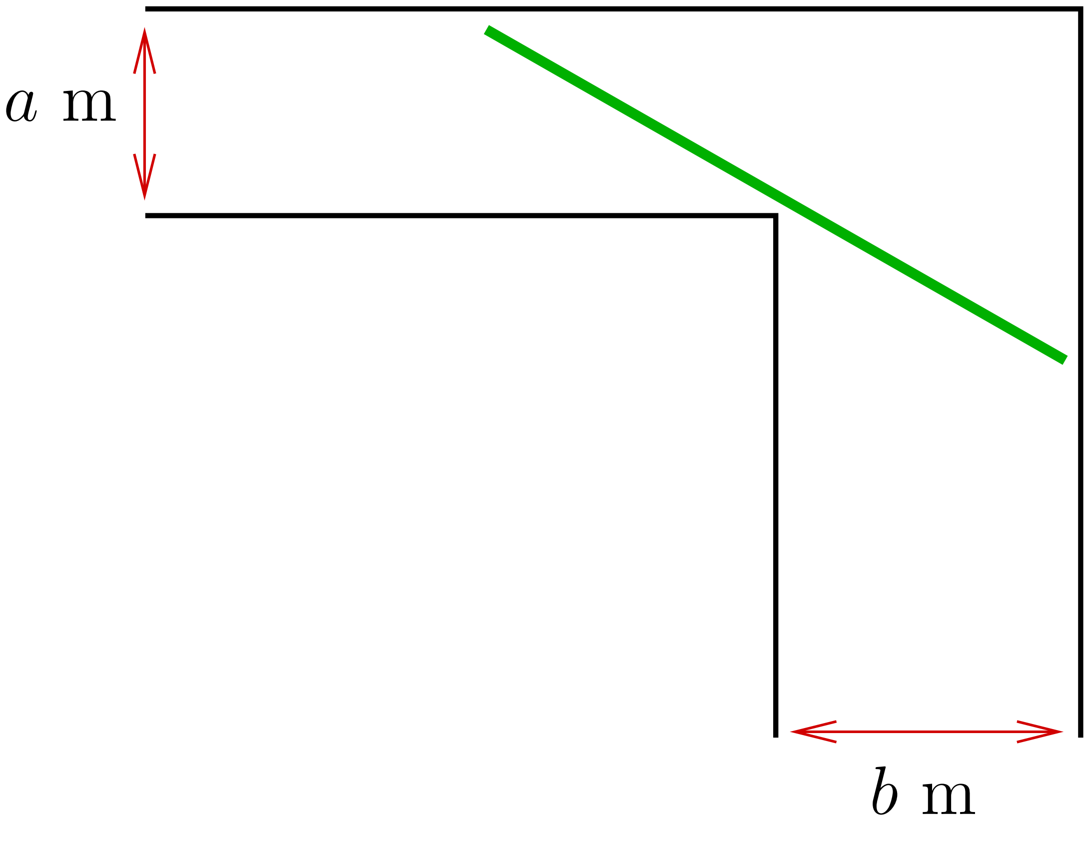
Oppgave 6, s. 269

To ikke negative tall har sum n.

Hva er den minste mulige verdien av summen av kvadratene av de to tallene?

Oppgave 24, s. 270

Finn lengden av den lengste bjelken vi kan bære horisontalt rundt hjørnet fra korridor av bredde a meter til en korridor av bredde b meter. (Vi antar at bjelken ikke har noen bredde.)



Ubestemte integral

$$\int x^r\,dx = \frac{1}{r+1}x^{r+1} + C, r \neq -1 \qquad \int \frac{1}{x}dx = \ln x + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C, \quad \int \cos x\,dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$$

Torsdag 3. november

Avsnitt 6.3

- Delbrøkoppspaltning (partial fractions)

$$\frac{1}{x(x-1)} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}$$

- Integrasjon av rasjonale funksjoner

$$\int \frac{dx}{x(x-1)} = \int \frac{dx}{x-1} - \int \frac{dx}{x}$$
$$= \ln\left|\frac{x-1}{x}\right| + C$$

Delbrøkoppspaltning (s. 371)

P og Q polynomer. Graden til P er lavere enn graden til Q. Da kan vi

(a) faktorisere $Q(x)$ som

$$Q(x) = K(x-a_1)^{m_1}(x-a_2)^{m_2}\dots(x-a_j)^{m_j}$$
$$\times(x^2+b_1x+c_1)^{n_1}\dots(x^2+b_kx+c_1)^{n_k}$$

Med andre ord: Vi kan faktorisere $Q(x)$ i lineær- og annengradsfaktorer.

Delbrøkoppspaltning (s. 371)

P og Q polynomer. Graden til P er lavere enn graden til Q. Da kan vi

(b) Skrive $P(x)/Q(x)$ som delbrøk slik at

(i) Til hver faktor $(x-a)^m$ av $Q(x)$ hører en sum

$$\frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \cdots + \frac{A_m}{(x-a)^m}$$

(ii) Til hver faktor $(x^2+bx+c)^n$ hører en sum

$$\frac{B_1x+C_1}{x^2+bx+c} + \frac{B_2x+C_2}{(x^2+bx+c)^2} + \cdots + \frac{B_nx+C_n}{(x^2+bx+c)^n}$$

Tirsdag 8. november

Polynomdivisjon

Avsnitt 6.5

- Uegentlige integral

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{R\to\infty}\int_a^R f(x)\,dx$$

Avsnitt 7.1

- Volum av omdreiningslegemer: skivemetoden

Uegentlige integral, type I

Hvis f er kontinuerlig i $[a, \infty[$ definerer vi:

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{R\to\infty} \int_a^R f(x)\,dx.$$

Hvis f er kontinuerlig i $]-\infty, b]$ definerer vi:

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{R\to-\infty} \int_R^b f(x)\,dx.$$

Hvis grenseverdien av et slikt uegentlig integral finnes, sier vi at integralet **konvergerer**. Hvis ikke, sier vi at det **divergerer**.

Uegentlige integral, type II

Hvis f er kontinuerlig i $]a, b]$ (og muligens ubegrenset der) definerer vi:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{c \to a+} \int_c^b f(x)\,dx.$$

Hvis f er kontinuerlig i $[a, b[$ (og muligens ubegrenset der) definerer vi:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{c \to b-} \int_a^c f(x)\,dx.$$

Hvis grenseverdien av et slikt uegentlig integral finnes, sier vi at integralet **konvergerer**. Hvis ikke, sier vi at det **divergerer**.

Torsdag 10. november

Avsnitt 7.1:

- Volum av omdreiningslegemer: sylinderskallmetoden

Avsnitt 7.9

- Første ordens differensialligninger
  - separable ligninger:

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y),$$

Tirsdag 15. november

Avsnitt 7.9

- Første ordens differensialligninger
  - separable ligninger
  - første ordens lineære ligninger:

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x).$$

Avsnitt 3.7

- Annen ordens lineære homogene diff.ligninger med konstante koeffisienter (!)

$$ay'' + by' + cy = 0$$

Onsdag 16. november

Avsnitt 3.7

- Annen ordens lineære homogene diff.ligninger med konstante koeffisienter (!)

$$ay'' + by' + cy = 0$$

Differensialligninger

Vi har sett på tre hovedtyper:

1. Separable differensialligninger

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y).$$

2. Første ordens lineære differensialligninger

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x).$$

3. Annenordens homogene differensialligninger med konstante koeffisienter

$$ay'' + by' + cy = 0.$$

Separable ligninger

Ligningen kan skrives på formen:

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y).$$

Finner implisitt løsning ved:

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)\,dx.$$

Første ordens lineære ligninger

Ligningen kan skrives på formen:

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x).$$

Generell løsning

$$y = e^{-\mu(x)} \int e^{\mu(x)} q(x)\, dx,$$

der

$$\mu(x) = \int p(x)\, dx.$$

2. ordens homogene (konst. koeff.)

Ligningen kan skrives på formen:

$$ay'' + by' + cy = 0,$$

der a, b, c er konstanter, og $a \neq 0$.

Gir karakteristisk ligning

$$ar^2 + br + c = 0$$

med løsninger

$$r = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$b^2 - 4ac > 0$

Tilfellet $b^2 - 4ac > 0$ gir

- to forskjellige reelle løsninger av karakteristisk ligning:

$$r_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, r_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

- generell løsning av differensialligning:

$$y = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}.$$

$b^2 - 4ac = 0$

Tilfellet $b^2 - 4ac = 0$ gir

- en reell dobbel løsning av karakteristisk ligning:

$$r = \frac{-b}{2a},$$

- generell løsning av differensialligning:

$$y = Ae^{rt} + Bte^{rt}.$$

$b^2 - 4ac < 0$

Tilfellet $b^2 - 4ac < 0$ gir

- to komplekse løsninger av karakteristisk ligning:

$$r = k \pm i\omega, \quad k = \frac{-b}{2a}, \ \omega = \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a},$$

- generell løsning av differensialligning:

$$y = Ae^{kt}\cos(\omega t) + Be^{kt}\sin(\omega t).$$

MNFMA100 eksamen mai 2005

Oppgave 5

a) Finn alle løsningene til

$$x(x+1)y' + y = x(x+1)^2 e^{-x^2} \qquad (*)$$

i intervallet $]-1,0[$. Vis at det bare finnes én løsning som tilfredsstiller

$$\lim_{x\to 0-} y(x) \in \mathbb{R}.$$

b) Vis at (*) har uendelig mange løsninger i intervallet $]-\infty,0[$ og at alle går gjennom punktet $(-1,0)$.

Eksamen mai 2005, O.5

a) Fant løsning:

$$y(x) = \left(\frac{x+1}{x}\right)\left(-C - \frac{1}{2}e^{-x^2}\right).$$

Hvis $\lim_{x\to 0-} y(x)$ skal fi nnes og være et reelt tall, så *må*

$$\lim_{x\to 0-}\left(-C - \frac{1}{2}e^{-x^2}\right) = 0,$$

fordi

$$\lim_{x\to 0-}\left(\frac{x+1}{x}\right) = -\infty.$$

Det gir $C = -1/2$, altså

$$y(x) = \left(\frac{x+1}{x}\right)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-x^2}\right).$$

Eksamen mai 2005, O.5

Kontrollerer at $\lim_{x\to 0-} y(x)$ finnes:

$$\lim_{x\to 0-} y(x) = \lim_{x\to 0-} \frac{(x+1)(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{-x^2})}{x} \left[\frac{0}{0}\right]$$

$$\stackrel{L'H}{=} \lim_{x\to 0-} \frac{(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{-x^2}) + (x+1)(xe^{-x^2})}{1}$$

$$= 0.$$

MA1101 - endelig pensumliste

- Kap. P : Hele
- Kap. 1 : Hele
- Kap. 2 : Hele
- Kap. 3 : Avsnittene 3.1, 3.2, 3.3, 3.4, 3.5 og 3.7 (kun homogene ligninger)
- Kap. 4 : Avsnittene 4.1, 4.2, 4.3, 4.4, 4.5 og 4.9
- Kap. 5 : Hele
- Kap. 6 : Avsnittene 6.1, 6.2 (ikke s. 359 og 362), 6.3 og 6.5
- Kap. 7 : 7.1 og 7.9
- Appendiks II (alt unntatt det som har med følger (sequences) å gjøre)
- Appendiks III (alt unntatt defi nisjonen av uniform kontinuitet og Teorem 4, s. A-22.)

MA1101 - Oversikt

Alt stoffet vi har gjennomgått kan vi plassere i en av følgende kategorier:

- Grenseverdier og kontinuitet
- Derivasjon
- Integrasjon
- Omvendte funksjoner og transcendente funksjoner
- Differensialligninger